МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова,
Г. А. Кузнецова

РЯДИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

У СХЕМАХ І ТАБЛИЦЯХ

Навчальний довідник
для самостійного вивчення вищої математики
для студентів 1–2 курсів денної та заочної форм навчання

Харків
ХНУМГ ім. О. М. Бекетова
2020

УДК 517.521:51-33(03)
Л21

С. М. Ламтюгова. Ряди та їх застосування у схемах і таблицях : навч. довід. для самост. вивч. вищої математики (для студентів 1–2 курсів денної та заочної форм навчання) / С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова, Г. А. Кузнецова ; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2020. – 103 с.

Автори : С. М. Ламтюгова,
Ю. В. Ситникова,
Г. А. Кузнецова

Рецензенти:

А. В. Якунін, кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики Харківського національного університету міського господарства ім. О. М. Бекетова;

М. В. Сидоров, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки

Рекомендовано кафедрою вищої математики, протокол № 1 від 31.08.19

Рекомендовано для студентів 1–2 курсів усіх спеціальностей як додатковий допоміжний матеріал для самостійного оволодіння темою «Ряди», що вивчається в курсі вищої математики.

ЗМІСТ

ВСТУП

У довіднику представлено теоретичний та практичний матеріал за темою «Ряди», яка входить до курсу вищої математики та вивчається студентами перших й других курсів економічних, будівельних, електромеханічних та електротехнічних спеціальностей денної та заочної форм навчання.

Довідник «Ряди та їх застосування» складається з трьох розділів – «Числові ряди», «Функціональні та степеневі ряди», «Ряди Фур'є» та додатків.

Перед розглядом основного матеріалу представлено окремі факти з історії виникнення та подальшого розвитку такого розділу математики як ряди.

Теоретичний матеріал представлено у вигляді опорних таблиць, які містять означення, формули, коментарі, зауваження, рисунки, приклади розв'язання типових задач із застосуванням зазначеного теоретичного матеріалу.

У додатках подано окремі теоретичні матеріали, теореми та задачі, розв'язання яких викликає труднощі, або є допоміжним матеріалом під час розв'язання більш складних задач.

Наприкінці створено абетковий покажчик, який допоможе швидко знайти довідникову інформацію за математичним терміном, а також відповідь на шукане питання щодо розв'язання задач.

ІЗ ІСТОРІЇ ВИНИКНЕННЯ РЯДІВ

Тема «Ряди» в курсі вищої математики є потужним інструментарієм вивчення функцій та обчислювальним апаратом у вирішенні прикладних задач не тільки в математиці, але й фізиці, економіці, хімії, геодезії, архітектурі, біології, екології і т.п. У більшості випадках, коли застосування традиційних математичних операцій стає складним або неможливим, можна отримати наближене рішення завдяки рядам. Тому вивчення цієї теми є важливим кроком математичної підготовки майбутніх фахівців.

Поняття нескінченних сум відомо вченим з Давньої Греції. Вони застосовували «метод вичерпування» при обчислені площ фігур та поверхонь, об’ємів тіл, довжин кривих і т.п. При цьому вони розбивали фігуру або тіло (лінію) на зліченне число частин з відомими площами або об’ємами (довжинами) і потім знаходили суму цих величин. Складовою частиною цього методу було знаходження суми нескінченої множини доданків. Подальший розвиток теорії рядів відбувався в тісному зв’язку з теорією наближеного представлення функцій у вигляді многочлену. Вперше це зробив І. Ньютон (1642–1727). У 1676 р. у його листі до секретаря Лондонського Королівського Товариства з’явилася формула, яку ми знаємо як формулу бінома Ньютона. Розвиваючи цю ідею, англійський математик Брук Тейлор (1685–1731) у 1715 р. довів, що будь-яку функцію, яка має у точці x_0 похідні всіх порядків, можна співставити ряд. Колін Маклорен (1698–1746) в роботі «Трактат о флюксіях» (1742) встановив, що степеневий ряд, що виражає аналітичну функцію, – єдиний, і це буде ряд Тейлора, породжений такою функцією. Як бачимо, ряди виникли в XVIII ст. як спосіб представлення функцій, що допускають нескінченне диференціювання. Але функція, представлена рядом, не називалась його сумою, і в загалі у той час не було ще визначено, що таке сума числового або функціонального ряду, були тільки спроби ввести це поняття. В формулюванні поняття суми збіжного ряду значну роль відіграв французький вчений О.Л. Коши (1789–1857). Саме він заявив у 1826 р., що розбіжний ряд не має суми. Він також сформулював критерій збіжності рядів і достатню ознаку збіжності ряду, яку ми зазвичай використовуємо на практиці, як й інші достатні ознаки збіжності. В 1768 р. французький математик і філософ Ж. Л. Даламбер дослідив відношення наступного члена до попереднього в біноміальному ряді і показав, що якщо це відношення за модулем менше одиниці, то ряд збігається. Коши в 1821 р. довів теорему, яка узагальнила ознаку збіжності знакододатних рядів, яку тепер називають ознакою Даламбера. Згодом були доведені наступні ознааки: радикальний та інтегральний Коши, І. Л. Раабе (1801– 1859), Е. Е. Куммера (1810–1893), Бертрана (1822–1900), Гауса (1777–1855). Вищезазначені ознаки дослідження збіжності знакододатних рядів відіграють важливу роль у досліджені функціональних рядів. Не менш значущими є й знакопочергові (знакозмінні) ряди. Для дослідження їх збіжності використовують ознаку Г. В. Лейбніца (1646–1716), великого німецького математика і філософа. Числові знакододатні й знакопочергові ряди використовуються нами для дослідження функціональних рядів, серед яких найбільш затребувані в механіці та різних розділах фізики степеневі и тригонометричні. У другій половині XVIII ст. почався активний розвиток математики, близької до сучасної, коли такі поняття, як функція, диференціальні рівняння, ряд стали набувати того сенсу, який ми вкладаємо натепер. На цей час вчені вже розуміли, що існують геометрична та аналітична моделі усього, що відбувається у природі і техніці. В 1715 р., виходячи з міркувань механіки та геометрії, Б. Тейлор вивів рівняння, яку описувало малі коливання струни із закріпленими кінцями – диференціальне рівняння з частинними похідними, з якого й почала свій розвиток математична фізика. Він знайшов частинний розв'язок такого рівняння, яке було періодичною функцією. Л. Эйлер розвинув теорію коливань, трактуючи кожну гармоніку як просте гармонічне коливання, а суму ряду як характеристику складного коливального руху, та отримав розклад цього руху в суму окремих гармонічних коливань. У 1748 р. Эйлер надав рішення одного з частинних випадків рівняння у вигляді тригонометричного ряду, а в 1753 р. Д. Бернулі (1700–1782) запропонував вже загальне рішення рівняння в аналоговій формі, виходячи з того, що звук від коливання струни, складається з основного тону та нескінченої множини обертонів. Эйлер вважав таку форму представлення функції недостатньо загальною. У пошуках відповіді на питання в 1807 р. Ж. Б. Фур'є (1756–1830) працюючи над аналітичною теорією тепла, довів, що функції, задані на кінцевих ділянках відрізка $[-l, l]$ різними рівняннями, можна представити на будь-якому подібному відрізку тригонометричним рядом.

1 ЧИСЛОВІ РЯДИ

1.1 Числовий ряд. Основні поняття

Словесне формулювання	Аналітичний запис
Числовим рядом називається нескінченна сума вигляду	$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots =$ $= \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, де $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ – дійсні або комплексні числа
Доданки, які утворюють числовий ряд, називають *членами ряду*	$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$
Загальний член ряду	u_n
Суму перших n-членів ряду називають *n-ю частковою сумою ряду* і позначають	$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n =$ $= \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$
ПРИКЛАД 1. Записати часткові суми: S_1, S_2, S_3. *Розв'язання:* $S_1 = u_1$ – перша часткова сума; $S_2 = u_1 + u_2$ – друга часткова сума; $S_3 = u_1 + u_2 + u_3$ – третя часткова сума.	
Ряд називається *збіжним,* якщо існує кінцева границя коли $n \to \infty$ послідовності	

$S_1, S_2, ..., S_n, ...$ його часткових сум, тобто	$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$
При цьому число S називають *сумою ряду* і пишуть так	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$
Якщо вказана границя нескінченна чи взагалі не існує, то ряд називається *розбіжним*	$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$
Ряд, який утворюється з початкового ряду $u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ відкиданням перших n членів називається n*-м залишком ряду*	$u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+k} + ...$ $n = 1, 2, ...$

ПРИКЛАД 2. Розглянемо декілька прикладів:
а) нескінченну суму $7+9-12+294+...$ не можна вважати числовим рядом, тому що неможливо скласти формулу загального члену ряду;
б) нескінченна сума $2+5+8+11+...$ є числовим рядом, т. я. її загальний член має вигляд $u_n = 3n-1$;

в) нескінченна сума $0+0+0+...$ є збіжним числовим рядом, т. я. сума цього числового ряду $S = 0$;

г) ряд $1+1+1+...+1+...$ є розбіжним числовим рядом, т. я. його сума $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$;

д) ряд $1-1+1-1+1-...+1+...$ є розбіжним числовим рядом, т. я. не існує границя його часткової суми: $S_1 = 1,\ S_2 = 0,\ S_3 = 1,\ S_4 = 0, ...$;

е) нехай задано числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Щоб перевірити його на збіжність, обчислимо його n-у часткову суму. Для цього запишемо формулу його загального члену у вигляді суми простих дробів:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1},$$

$$1=A(n+1)+Bn,$$

якщо $n=0$, $A=1$, якщо $n=-1$, $B=-1$,

отже, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$, тепер знайдемо n-у часткову суму:

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=$$

$$=1-\frac{1}{n+1},$$

обчислимо границю знайденої суми

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

тож, сума ряду $S=1$, а ряд є збіжним.

Відповідь: ряд збігається.

1.2 Властивості числових рядів

Словесне формулювання	Аналітичний запис
Якщо члени ряду помножити на один і той самий відмінний від нуля сталий множник $C=const\neq 0$, то його збіжність не порушиться.	$\sum_{n=1}^{\infty}Cu_n=C\sum_{n=1}^{\infty}u_n$

Зауваження 1. У випадку збіжного ряду його сума буде помножена на C

ПРИКЛАД 3. Нехай задано два числових ряди $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ і $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{(2n-1)(2n+1)}$. Перевірити для них виконання першої властивості числових рядів.

Розв'язання. Щоб з'ясувати збіжність заданих рядів, обчислимо n-у часткову суму кожного з них. Для цього запишемо формули їх загальних членів у вигляді суми простих дробів (приклад розкладу дробів на прості див. в п. 1.1 приклад 2).

Для першого ряду маємо:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right),$$

отже, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$, тепер знайдемо n-у часткову суму:

$$S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right),$$

обчислимо границю знайденої суми

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2},$$

значить сума ряду $S=1/2$, отже ряд є збіжним.

Для другого ряду маємо: $$\frac{5}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right),$$ отже, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$, тепер знайдемо n-у часткову суму: $$S_n=\frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=$$ $$=\frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right),$$ обчислимо границю знайденої суми $$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{5}{2},$$ отже, сума ряду $S=5/2$, отже ряд є збіжним. *Відповідь.* Порівнюючи значення сум даних збіжних рядів, очевидно бачимо виконання першої властивості числових рядів.	
Два збіжні ряди можна почленно додавати і віднімати.	$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n,$$ $$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}v_n,$$ $$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=$$ $$=(u_1\pm v_1)+\ldots+(u_n\pm v_n)+\ldots=$$

	$=\sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n$

Зауваження 2. Одержані таким чином ряди також збігаються
Збіжність або розбіжність ряду не порушиться, якщо змінити, відкинути чи добавити скінченне число членів.
Зауваження 3. Для збіжного ряду значення суми при цьому, в загальному випадку, змінюється, зокрема, ряд і будь-який його залишок збігаються чи розбігаються одночасно.
Для збіжного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$ його n-й залишок $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k} = R_n$ є похибкою наближення $S \approx S_n$ суми ряду S його n-ю частковою сумою S_n. При цьому $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$.
Сума (різниця) збіжного і розбіжного рядів є розбіжним рядом.
Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, то довільний ряд, отриманий з даного групуванням його членів, що не змінює порядку їх розташування, також збігається і має ту саму суму.

1.3 Ряд геометричної прогресії. Необхідна ознака збіжності. Достатня ознака розбіжності. Гармонічний ряд

<table>
<tr><th>Словесне формулювання</th><th>Аналітичний запис</th></tr>
<tr><td>Розглянемо геометричний ряд (ряд геометричної прогресії) з першим членом $a \neq 0$ і знаменником q.</td><td>$$a + aq + aq^2 + \ldots + \\ + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Зауваження 4. Ряд геометричної прогресії дуже часто застосовується при дослідженні рядів на збіжність</td></tr>
<tr><td>Сума n-перших членів геометричної прогресії обчислюється за формулою</td><td>$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}, \; q \neq 1$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Зауваження 5. Ряд геометричної прогресії збігається якщо $$|q| < 1$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Зауваження 6. Ряд геометричної прогресії розбігається якщо $$|q| \geq 1$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">ПРИКЛАД 4. Показати, що ряд $2^3 + 2^2 + 2 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-3}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-3}}$ є збіжним.

Розв'язання. Запишемо заданий ряд у вигляді</td></tr>
</table>

$$2^3\cdot 1+2^3\cdot\frac{1}{2}+2^3\cdot\frac{1}{2^2}+\ldots+2^3\cdot\frac{1}{2^n}+\ldots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}2^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ a=2^3,\ q=\frac{1}{2}.$$

Оскільки знаменник геометричної прогресії менший, ніж одиниця, то ряд є збіжним.

Відповідь: ряд збігається.

Необхідна ознака збіжності. Якщо ряд збігається, то його загальний член u_n прямує до нуля при $n\to\infty$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n -$ збігається $\Rightarrow$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$

Зауваження 7. Розглянута ознака є тільки необхідною, але не є достатньою. Тобто, з того що загальний член u_n при $n\to\infty$ прямує до нуля, ще не випливає, що ряд збігається.

Достатня ознака розбіжності. Якщо границя загального члена u_n при $n\to\infty$ відмінна від нуля або не існує, то ряд розбігається	$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0\Rightarrow$ $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n -$ розбігається

ПРИКЛАД 5. Дослідити ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n+5}$ на збіжність.

Розв’язання. Знайдемо границю загального члену ряда

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{n+5}=3\neq 0,$$

значить ряд розбігається, т. я. виконується достатня ознака

розбіжності.

Відповідь: заданий ряд розбігається.

ПРИКЛАД 6. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ на збіжність.

Розв'язання. Знайдемо границю загального члену ряду

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e \neq 0,$$

таким чином, ряд розбігається, оскільки виконується достатня ознака розбіжності.

Відповідь: ряд розбігається.

ПРИКЛАД 7. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3}$ на збіжність.

Розв'язання. Знайдемо границю загального члену ряда

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(1/(n+3)\right) = 0,$$

отже, ряд може бути як збіжним, так і розбіжним.

Відповідь: щоб дати відповідь на дане питання, необхідно застосувати достатню ознаку збіжності рядів.

Гармонічний ряд	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

ПРИКЛАД 8. Дослідимо збіжність гармонічного ряду.

Розв'язання. Виконаємо це аналогічно прикладу 7,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(1/n) = 0,$$

тобто необхідна ознака збіжності не дає відповідь про розбіжність або збіжність даного ряду. Зробимо це іншим способом.

Згідно з другою чудовою границею отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \Rightarrow$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e,\ \forall n \in N,$$

прологарифмуємо обидві частини за основою *e*:

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \ln e,\ n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1,$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},\ \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

$$\ln(n+1) - \ln n < 1/n.$$

В отриману нерівність підставимо послідовно $n = 1,\ 2, \ldots,\ n-1,\ n$:

$$\ln 2 - \ln 1 < 1,$$

$$\ln 3 - \ln 2 < 1/2,$$

$$\ldots$$

$$\ln(n+1) - \ln n < 1/n.$$

Додамо почленно до лівої та правої частини нерівностей:

$$\ln 2+\ln 3-\ln 2+\ldots+\ln(n+1)-\ln n \;<\; 1+1/2+\ldots+1/n\,,$$ $$\ln(n+1)<\;S_n\;,\text{ т. я. }\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=\infty\Rightarrow S_n=\infty.$$ *Відповідь:* гармонічний ряд розбігається.

1.4 Достатні ознаки збіжності знакододатних рядів

1.4.1 Ознака Д'Аламбера

Словесне формулювання	Аналітичний запис
Числовий ряд називається *знакододатним*, якщо всі його члени невід'ємні	$u_1+\ldots+u_n+\ldots=$ $=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\,,\quad u_n\ge 0,$ $n=1,2,\ldots$
Ознака Даламбера. Якщо для знакододатного ряду існує границя відношення наступного члена до попереднього, то а) ряд збігається при: б) ряд розбігається при: в) не можна зробити висновок, збігається ряд чи розбігається при:	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\,,\quad u_n\ge 0,$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l\Rightarrow$ а) $l<1$ б) $l>1$ в) $l=1$

Зауваження 8. На практиці при дослідженні на збіжність найчастіше використовується саме ознака Даламбера. Щоб не натрапити на випадок невизначеності $l=1$, її застосо-

вують до таких рядів, загальний член яких містить у своєму складі факторіал і/або показникову функцію від n, наприклад, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{7^{2n-1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6n+1}{(2n+1)!}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{2n}\sqrt{n}}{(n-1)!}$.

ПРИКЛАД 9. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{\sqrt[5]{n\cdot 11^n}}$ на збіжність.

Розв'язання. Загальний член цього ряду можна записати у вигляді $u_n=\frac{3n-2}{11^{(1/5)n}\sqrt[5]{n}}$. До його складу входить показникова функція $11^{(1/5)n}$. Тому застосуємо достатню ознаку Даламбера:

$$u_{n+1}=\frac{3(n+1)-2}{11^{(1/5)(n+1)}\sqrt[5]{n+1}}=\frac{3n+1}{11^{(1/5)n+1/5}\sqrt[5]{n+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)11^{(1/5)n}\sqrt[5]{n}}{11^{(1/5)n+1/5}\sqrt[5]{n+1}(3n-2)}=\frac{1}{11^{1/5}}\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{3n-2}\times$$

$$\times\lim_{n\to\infty}\sqrt[5]{\frac{n}{n+1}}=11^{-1/5}\lim_{n\to\infty}\frac{3+1/n}{3-2/n}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[5]{\frac{1}{1+1/n}}=$$

$$=11^{-1/5}\cdot 1\cdot\sqrt[5]{1}=11^{-1/5}<1.$$

Відповідь: ряд збігається.

ПРИКЛАД 10. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^3+3n}$ на збіжність.

Розв'язання. У загальний член цього ряду $u_n = \frac{(n+1)!}{n^3+3n}$ входить факторіал $(n+1)!$, тому застосуємо ознаку Даламбера:

$$u_{n+1} = \frac{(n+1+1)!}{(n+1)^3+3(n+1)} = \frac{(n+2)!}{n^3+3n^2+6n+4} = \frac{(n+1)!(n+2)}{n^3+3n^2+6n+4};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!(n+2)(n^3+3n)}{(n^3+3n^2+6n+4)(n+1)!} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4+2n^3+3n^2+6n}{n^2+4n+3} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+2/n+3/n^2+6/n^3}{1/n^2+4/n^3+3/n^4} = \left|\frac{1}{0}\right| = +\infty > 1.$$

Відповідь: ряд розбігається.

1.4.2 Ознаки порівняння

Словесне формулювання	Аналітичний запис
Зауваження 9. При застосуванні наступних ознак порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, що досліджується на збіжність,	

<table>
<tr><td colspan="2">порівнюється з еталонним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, про який відомо збігається він чи розбігається.</td></tr>
<tr><td>За еталонний ряд часто приймають узагальнений гармонічний ряд (ряд Діріхле)</td><td>$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$ (якщо $p > 1$, то ряд збігається; якщо $p \le 1$, то ряд розбігається)</td></tr>
<tr><td>За еталонний ряд приймають геометричний ряд (ряд геометричної прогресії)</td><td>$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n$$</td></tr>
<tr><td colspan="2"> Перша (основна) ознака порівняння.
1. Нехай маємо збіжний еталонний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, причому $u_n \le v_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ теж збігається.
(Якщо $u_n > v_n$, то жодних висновків робити не можна).
2. Нехай маємо розбіжний еталонний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, причому $u_n \ge v_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ теж розбігається.
(Якщо $u_n < v_n$, то ніяких висновків робити не можна).
Таким чином, з розбіжним рядом порівнюємо «у бік більше»; а зі збіжним рядом – «у бік менше». </td></tr>
</table>

Зауваження 10. Основна ознака порівняння справджується, коли члени рядів задовольняють відповідні нерівності, починаючи хоча б з деякого номера.

ПРИКЛАД 11. За допомогою основної ознаки порівняння дослідити на збіжність даний знакододатний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n \ln(4n)}.$$

Розв'язання. Застосуємо основну ознаку порівняння з «більшим» збіжним рядом геометричної прогресії

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (1/8)^n$$

зі знаменником $q = 1/8 < 1$:

$$u_n = 1/(8^n \ln(4n)) < 1/8^n = (1/8)^n = v_n,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Оскільки $u_n \le v_n$, то «менший» ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8^n \ln(4n)}$ також збігається.

Відповідь: ряд збігається.

ПРИКЛАД 12. За допомогою основної ознаки порівняння дослідити на збіжність даний знакододатний ряд:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4}}{n^2 - n - 2}$$

Розв'язання. Оскільки

$$u_n = \frac{\sqrt[3]{n^4}}{n^2 - n - 2} \geq \frac{\sqrt[3]{n^4}}{n^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = v_n$$

при $n \geq 3$ і «менший» ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{2/3}$ є розбіжним

узагальненим гармонічним рядом з $p = 2/3 \leq 1$, то за озна-

кою порівняння «більший» ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^4}}{n^2 - n - 2}$

також розбігається.

Відповідь: ряд розбігається.

Друга (гранична) ознака порівняння. Якщо існує скінченна, відмінна від нуля границя $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = l$ $(0 < l < +\infty)$ відношення загальних членів двох знакододатних рядів $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, то обидва ряди поводять себе однаково щодо збіжності: одночасно збігаються чи розбігаються.

ПРИКЛАД 13. За допомогою граничної ознаки порівняння дослідити на збіжність даний знакододатний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + 7/n\right).$$

Розв'язання. Відомо, що $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$ при $\alpha \to 0$. Звідси при $n\to\infty$ маємо: $7/n\to 0$; $\ln\left(1+7/n\right)\sim 7/n=O^*(1/n)$. Тому для даного ряду застосуємо граничну ознаку порівняння з гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/n$, що розбігається:

$$u_n=\ln\left(1+7/n\right),\ v_n=1/n;\ \text{тоді}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+7/n\right)}{1/n}=\left|\frac{0}{0}\right|=$$

$$=\left|\ \alpha=7/n\to 0\ \text{ при }\ n\to\infty\right|=$$

$$=7\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}=7\ \ (\neq 0,\ \neq\infty).$$

Відповідь: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+7/n\right)$ розбігається.

ПРИКЛАД 14. За допомогою граничної ознаки порівняння дослідити на збіжність даний знакододатний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[4]{n^7}+2}{5n^4-n^2+8}.$$

Розв'язання. Оскільки

$$u_n=\frac{\sqrt[4]{n^7}+2}{5n^4-n^2+8}\sim\frac{\sqrt[4]{n^7}}{5n^4}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{n^{9/4}}=O^*(1/n^{9/4}),$$

то застосуємо граничну ознаку порівняння з узагальненим гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}1/n^{9/4}$, $p=9/4>1$, що збігається:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{9/4}(n^{7/4}+2)}{5n^4-n^2+8}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4(1+2/n^{7/4})}{n^4(5-1/n^2+8/n^4)}=$$

$$=1/5 \quad (\neq 0,\ \neq\infty),$$

тож обидва ряди поводять себе однаково – збігаються.

Відповідь: ряд збігається.

1.4.3 Радикальна ознака Коші

Словесне формулювання	Аналітичний запис
Радикальна ознака Коші. Якщо для знакододатного ряду існує границя, то	$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l\Rightarrow$
а) ряд збігається при:	а) $l<1$;
б) ряд розбігається при:	б) $l>1$;
в) не можна зробити висновок щодо збіжності чи розбіжності ряду при:	в) $l=1$.

Зауваження 11. Радикальну ознаку зручно застосовувати, коли загальний член ряду має в своєму складі показникові функції від n, з яких досить просто добувається корінь n-го степеня. Наприклад:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin^{n+2}\frac{n-1}{n^3+1};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\ln^n\frac{n+1}{n+2};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-4}{10n+3}\right)^{n^2}.$$

Зауваження 12. У випадку невизначеності $l=1$, радикальна ознака, як і «рівносильна» їй ознака Даламбера, відповіді не дає. Потрібні додаткові дослідження на основі інших більш «сильних» ознак, до яких відносяться ознаки порівняння і інтегральна ознака.

ПРИКЛАД 15. За допомогою радикальної ознаки Коші дослідити на збіжність даний знакододатний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{tg}^n \frac{n^2}{n^4+2}.$$

Розв'язання. Загальний член ряду є степенем з показником n виразу $\mathrm{tg}\frac{n^2}{n^4+2}$, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\mathrm{tg}^n \frac{n^2}{n^4+2}} = \lim_{n\to\infty}\mathrm{tg}\frac{n^2}{n^4+2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\mathrm{tg}\frac{1/n^2}{1+2/n^3} = \mathrm{tg}0 = 0 < 1.$$

Відповідь: ряд збігається.

ПРИКЛАД 16. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ на збіжність.

Розв'язання. Загальний член ряду

$$u_n = \frac{2}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

містить степені з показниками n та n^2, що залежать від

n, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{1/n}}{3}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^n=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{-(n+1)\cdot\frac{-1}{n+1}\cdot n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}e^{\frac{-n}{n+1}}=\frac{1}{3}e^{-1}=\frac{1}{3e}<1.$$

Відповідь: ряд збігається.

ПРИКЛАД 17. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n}{\arcsin^n\left(n/(n+3)\right)}$ на збіжність.

Розв'язання. Загальний член ряду $u_n=\frac{9^n}{\arcsin^n\left(n/(n+3)\right)}$ містить степені з показником n, що залежать від n, тому застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{9^n}{\arcsin^n\left(n/(n+3)\right)}}=$$

$$=9\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\arcsin\left(n/(n+3)\right)}=9\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\arcsin\left(1/(1+3/n)\right)}=$$

$$=9\cdot\frac{1}{\arcsin 1}=\frac{9\cdot 2}{\pi}=\frac{18}{\pi}>1.$$

Відповідь: ряд розбігається.

1.4.4 Інтегральна ознака

Словесне формулювання
Інтегральна ознака Коші. Якщо члени знакододатного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \geq 0$, $n = 1, 2, ...$ утворюють спадну послідовність ($u_{n+1} \leq u_n$, $n = 1, 2, ...$) і на проміжку $\left[1; +\infty\right)$ існує спадна неперервна невід'ємна функція $f(x)$ така, що при натуральних значеннях аргументу співпадає з членами ряду ($f(n) = u_n$, $n = 1, 2, ...$), тоді вказаний ряд і невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ ведуть себе однаково: збігаються чи розбігаються одночасно.
Зауваження 13. На практиці функцію $f(x)$ отримують, замінюючи у виразі загального члена u_n ряду дискретну змінну n на неперервну x.
Наслідок 1. Для суми S і n-го залишку R_n збіжного знакододатного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ справедливі оцінки: $$\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx < S < u_1 + \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx; \quad R_n < \int\limits_1^{+\infty} f(x)dx,$$ остання з яких дозволяє судити, скільки потрібно взяти перших n членів, щоб при заміні суми S ряду частковою сумою S_n отримати задану похибку.

ПРИКЛАД 18. За допомогою інтегральної ознаки дослідити на збіжність *узагальнений гармонічний ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p .$$

Розв'язання. Покладемо $f(x) = 1/x^p$. Ця функція задовольняє умовам інтегральної ознаки. Розглянемо невласний інтеграл

$$\int_{1}^{+\infty} (1/x^p)\, dx .$$

При $p = 1$ маємо *гармонічний ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n .$$

Для нього

$$\int_1^{+\infty} (1/x)\, dx = \lim_{N\to\infty} \ln|x|\Big|_1^N = +\infty .$$

Інтеграл і ряд розбіжні.

Нехай $p \neq 1$. Тоді

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{N\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_1^N = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{N^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right).$$

Коли $p > 1$, то

$$\int_1^{+\infty} (1/x^p)\, dx = 1/(p-1) .$$

Інтеграл і ряд збіжні.

Коли $p<1$, то

$$\int_1^{+\infty}(1/x^p)\,dx=+\infty.$$

Інтеграл і ряд розбіжні.

Остаточно маємо відповідь:

узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^p$ *збігається при* $p>1$ *і розбігається при* $p\le 1$.

ПРИКЛАД 19. За допомогою інтегральної ознаки Коші дослідити на збіжність даний знакододатний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}.$$

Розв'язання. Розглянемо функцію

$$f(x)=1\big/((x+1)\ln^2(x+1)),$$

що приймає додатні значення, неперервна і монотонно спадає на інтервалі $[1;+\infty)$, причому $f(n)=u_n$. Дослідимо невласний інтеграл:

$$\int_1^{+\infty}f(x)dx=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}=\lim_{N\to+\infty}\int_1^{N}\frac{dx}{(x+1)\ln^2(x+1)}=$$

$$=\int_1^{N}\frac{d\ln(x+1)}{\ln^2(x+1)}=\lim_{N\to+\infty}\int_1^{N}\ln^{-2}(x+1)d(\ln(x+1))=$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\left.\frac{\ln^{-1}(x+1)}{-1}\right|_1^N=-\lim_{N\to+\infty}\left.\frac{1}{\ln(x+1)}\right|_1^N=$$

$$=-\lim_{N\to+\infty}\left(1/\ln(N+1)-1/\ln 2\right)=1/(\ln 2)\ne\infty.$$

Отже, цей невласний інтеграл збігається, а тому даний ряд теж збігається.

Відповідь: ряд збігається.

ПРИКЛАД 20. За допомогою інтегральної ознаки Коші дослідити на збіжність даний знакододатний ряд:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)\sqrt[5]{\ln(3n-2)}}$$

Розв'язання. Введемо функцію

$$f(x) = \frac{1}{(3x-2)\sqrt[5]{\ln(3x-2)}},$$

що приймає додатні значення, є неперервною і монотонно спадаючою на інтервалі $[2;+\infty)$, при цьому $f(n) = u_n$. Розглянемо невласний інтеграл:

$$\int_2^{+\infty} f(x)dx = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{(3x-2)\sqrt[5]{\ln(3x-2)}} =$$

$$= \int_2^{N} \frac{dx}{(3x-2)\sqrt[5]{\ln(3x-2)}} = \left| \begin{array}{ll} u = \ln(3x-2); & du = 3dx/(3x-2) \\ u_1 = \ln 4; & u_2 = \ln(3N-2) \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{N\to+\infty} \int_{\ln 4}^{\ln(3N-2)} u^{-1/5} du = \frac{1}{3} \lim_{N\to+\infty} \frac{u^{4/5}}{4/5} \Bigg|_{\ln 4}^{\ln(3N-2)} =$$

$$= \frac{5}{12} \lim_{N\to+\infty} \left(\ln^{4/5}(3N-2) - \ln^{4/5} 4 \right) = \infty$$

Невласний інтеграл розбігається, то даний ряд теж розбігається.

Відповідь: ряд розбігається.

1.5 Знакозмінні ряди. Абсолютна й умовна збіжність знакозмінних рядів

<table>
<tr><td>Словесне формулювання</td><td>Аналітичний запис</td></tr>
<tr><td>Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, що містить нескінченну кількість членів обох знаків «+» і «−», називається знакозмінним.</td><td>$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Достатня ознака збіжності знакозмінного ряду. Якщо для знакозмінного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert u_n \rvert$, складений з модулів його членів, то даний ряд також збігається.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Зауваження 14. Наведена ознака є лише достатньою, але не необхідною: існують збіжні знакозмінні ряди, яким відповідають розбіжні ряди, утворені з модулів їх членів</td></tr>
<tr><td colspan="2">Знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ називається абсолютно збіжним, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert u_n \rvert$, складений з модулів його членів, збігається, та умовно збіжним, коли сам ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert u_n \rvert$ з модулів його членів розбігається.</td></tr>
</table>

З попередньої ознаки випливає, що *довільний абсолютно збіжний ряд є збіжним*.

Зауваження 15. В абсолютно збіжному ряді, подібно до кінцевої суми, члени можна переставляти як завгодно. При цьому він залишається абсолютно збіжним і його сума не змінюється.

Навпаки, в умовно збіжному ряді перестановка членів може привести до зміни його суми і навіть до розбіжності.

Зауваження16. Дослідження знакозмінного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ на збіжність доцільно розпочинати з виявлення абсолютної збіжності як більш «сильної», застосовуючи відомі ознаки збіжності знакододатних рядів до ряду з модулів $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Якщо ряд з модулів збігається, то сам знакозмінний ряд абсолютно збіжний і дослідження завершене.

Якщо ж ряд з модулів розбігається, то інколи можна відразу зробити висновок про розбіжність і самого знакозмінного ряду (наприклад, при невиконанні необхідної ознаки збіжності). Але, частіше, далі потрібно буде провести більш «тонке» дослідження безпосередньо самого знакозмінного ряду на умовну збіжність.

1.6 Знакопочергові ряди. Ознака Лейбниця

<table>
<tr><th>Словесне формулювання</th><th>Аналітичний запис</th></tr>
<tr><td>Знакозмінний ряд, два довільні сусідні члени якого мають різні знаки, називається знакопочерговим або рядом Лейбниця:</td><td>$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n =$$ $$= a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots,$$ де $a_n = |u_n| \geq 0$.</td></tr>
<tr><td>Достатня ознака Лейбниця. Якщо для знакопочергового ряду, виконуються дві умови:
1) послідовність, складена з модулів членів ряду, є монотонно спадною,
2) і прямує до нуля, тоді цей ряд є збіжним, причому його сума S додатна і не перевищує модуля першого члена: $0 < S \leq a_1$.</td><td>$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n,$$ $a_n \geq 0$:
1) $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots;$
2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Наслідок 2. Абсолютна похибка Δ_n від заміни суми S збіжного знакопочергового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ будь-якою його частковою сумою S_n не перевищує модуля першого з відкинутих членів. Іншими словами, модуль за-лишку (або остачі) R_n збіжного</td></tr>
</table>

знакопочергового ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ не перевищує модуля першого з відкинутих членів. Тобто

$$\Delta_n = |S - S_n| = |R_n| \le a_{n+1}.$$

ПРИКЛАД 21. Обчислити наближено суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$$

з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

Розв'язання. Перевіримо виконання умов ознаки Лейбниця:

$$2)\ \lim_{n\to\infty}|u_n| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^n} = \left|\frac{1}{\infty}\right| = 0;$$

$$1)\ |u_n| = \frac{1}{n^n} > \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = |u_{n+1}|,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Отже, умови виконуються. Даний ряд збігається. Обчислимо наближено його суму, застосовуючи наслідок з ознаки Лейбниця:

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^n} + \ldots = S;$$

$$|u_1| = 1 > \varepsilon; |u_2| = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} > \varepsilon; |u_3| = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} > \varepsilon;$$

$$|u_4| = \frac{1}{4^4} = \frac{1}{256} > \varepsilon; |u_5| = \frac{1}{5^5} = \frac{1}{3125} \approx 0{,}00032 < \varepsilon.$$

Отже, для заданої точності $\varepsilon = 10^{-3}$ достатньо взяти перші чотири доданки, тобто

$$S = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256} \approx 0,783.$$

Відповідь: $S \approx 0,783$.

Зауваження 17. Друга умова ознаки Лейбниця $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, як розглянуто раніше, є необхідною для збіжності. Тому спочатку перевіряють саме її.

ПРИКЛАД 22. За допомогою ознаки Лейбниця дослідити на збіжність даний знакопочерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3n^4 - 1}.$$

Розв'язання. Перевіримо виконання умов ознаки Лейбниця:

$$2)\ \lim_{n\to\infty} |u_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n^4 - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n^3}{3 - 1/n^4} = 0;$$

$$1)\ |u_n| = \frac{n}{3n^4 - 1} > \frac{n+1}{3(n+1)^4 - 1} = |u_{n+1}|,\ n = 1, 2, \ldots,$$

доведемо цю нерівність:

$$\frac{n\left(3(n+1)^4 - 1\right) - (n+1)\left(3n^4 - 1\right)}{\left(3n^4 - 1\right)\left(3(n+1)^4 - 1\right)} > 0;$$

$$\frac{n\left(3(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) - 1\right) - 3n^5 + n - 3n^4 + 1}{\left(3n^4 - 1\right)\left(3(n+1)^4 - 1\right)} > 0;$$

$$\frac{3n^5+12n^4+18n^3+12n^2+2n-3n^5+n-3n^4+1}{\left(3n^4-1\right)\left(3(n+1)^4-1\right)}>0;$$

$$\begin{cases} 9n^4+18n^3+12n^2+3n+1>0, \\ \left(3n^4-1\right)\left(3(n+1)^4-1\right)>0, \end{cases} \quad \forall n\in N.$$

Отже, умови виконуються. Даний ряд збігається.

Відповідь: ряд збігається.

ПРИКЛАД 23. За допомогою ознаки Лейбниця дослідити на збіжність даний знакопочерговий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4^n}{n}.$$

Розв'язання. Перевіримо виконання другої умови ознаки Лейбниця:

$$\lim_{n\to\infty}|u_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{n}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|.$$

Скористаємося правилом Лопіталя:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(4^n)'}{(n)'}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4^n\ln 4}{1}=\ln 4\lim_{n\to+\infty}4^n=\infty$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\infty\neq 0$. Оскільки друга умова ознаки Лейбниця не виконується, то даний ряд розбігається.

Відповідь: ряд розбігається.

ПРИКЛАД 24. Дослідити на абсолютну (умовну) збіжність знакочерговий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}.$$

Розв'язання. Спочатку дослідимо ряд на абсолютну збіжність, для цього розглянемо ряд з модулів

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

який є розбіжним (гармонічний ряд). Таким чином, знакочерговий ряд не є абсолютно збіжним. Перевіримо його на умовну збіжність. Для цього розглянемо виконання другої умови ознаки Лейбниця:

$$\lim_{n\to\infty}|u_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\left|\frac{1}{\infty}\right|=0.$$

Друга умова ознаки Лейбниця виконується, перевіримо першу умову:

$$|u_n|=\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}=|u_{n+1}|,\ n=1,2,\ldots.$$

Дві умови ознаки Лейбниця виконуються, отже, знакочерговий ряд є збіжним. Враховуючи те, що ряд з модулів є розбіжним, робимо висновок, що знакочерговий ряд збігається умовно.

Відповідь: знакочерговий ряд збігається умовно.

2 ФУНКЦІОНАЛЬНІ ТА СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

2.1 Функціональні ряди

2.1.1 Поняття функціонального ряду та області його збіжності

Словесне формулювання	Аналітичний запис, графічне зображення
Ряд, елементами якого є функції змінної x, називають *функціональним*	$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$
Множина (сукупність) значень змінної x при яких ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ збігається, називається *областю збіжності функціонального ряду*	$x\in(a,b)$
Зауваження 18. При різних значеннях $x=x_0$ з функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ можна отримати різні числові ряди, які будуть як збіжними, так й розбіжними	
Якщо функціональний ряд збігається і його сума дорівнює $S(x)$, то вона дорівнює сумі остачі ряду $R_n(x)$ та	$S(x)=S_n(x)+R_n(x)$, де $S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)$, $R_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots$

суми $S_n(x)$ перших n елементів ряду	
Для всіх значень x з області збіжності ряду має місце співвідношення $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, тому умова збіжності функціонального ряду можна записати так	$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\left[S(x) - S_n(x)\right] = 0$

Зауваження 19. У найпростіших випадках визначення області/інтервалу збіжності функціонального ряду достатньо застосувати відомі ознаки збіжності (дивись п. 1.4), вважаючи x фіксованим

ПРИКЛАД 25. Визначити область збіжності ряду

$$\frac{x+1}{1\cdot 2} + \frac{(x+1)^2}{2\cdot 2^2} + \ldots + \frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n} + \ldots$$

Розв'язання. Для заданого функціонального ряду запишемо n елемент та $n+1$ елемент

$$u_n = \frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}, \quad u_{n+1} = \frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}.$$

Обчислимо границю

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}} : \frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^n\cdot(x+1)}{(n+1)\cdot 2^n\cdot 2}\cdot\frac{n\cdot 2^n}{(x+1)^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\cdot(x+1)}{(n+1)\cdot 2}\right| = \left|\frac{x+1}{2}\right| = \frac{1}{2}\left|x+1\right|.$$

Згідно з ознакою Даламбера (дивись п. 1.4.1) можемо стверджувати, що заданий ряд збігається (й при цьому абсолютно), якщо $\frac{1}{2}|x+1|<1$, вирішуючи цю нерівність $|x+1|<2$, $-2<x+1<2$, ми з'ясуємо, що це можливо при $-3<x<1$; ряд розбігається, якщо $\frac{1}{2}|x+1|>1$, тобто при $-\infty<x<-3$ або $1<x<\infty$. Якщо $x=1$, то ми отримаємо гармонічний ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...$, який є розбіжним, а якщо $x=-3$, знакозмінний ряд $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...$, який відповідно до ознаки Лейбніца збігається умовно.

Відповідь: заданий функціональний ряд збігається при $-3\le x<1$.

ПРИКЛАД 26. Визначити область збіжності ряду

$$\ln x+\ln^2 x+\ln^3 x+...+\ln^n x+...$$

Розв'язання. Заданий ряд є функціональним рядом оскільки його елементи є функціями змінної x. Запишемо ряд з абсолютних величин елементів цього ряду

$$|\ln x|+|\ln^2 x|+|\ln^3 x|+...+|\ln^n x|+...$$

та дослідимо його за ознакою Даламбера

$$u_n=|\ln^n x|,\ u_{n+1}=|\ln^{n+1} x|,\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\ln^{n+1} x}{\ln^n x}\right|=|\ln x|.$$

Визначимо при яких значеннях x ця границя буде менша за одиницю, тобто вирішимо нерівність

$|\ln x|<1,\ -1<\ln x<1,\ e^{-1}<e^{\ln x}<e,\ e^{-1}<x<e$ або $\frac{1}{e}<x<e$.

Маємо, що заданий ряд збігається (при цьому абсолютно), якщо $x\in\left(\frac{1}{e},e\right)$, а зовні цього інтервалу – розбігається. Дослідимо граничні точки цього інтервалу окремо. При $x=\frac{1}{e}$ ми отримаємо числовий ряд

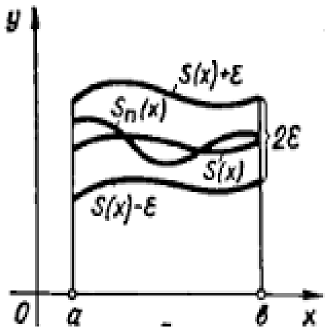
$$\ln\frac{1}{e}+\ln^2\frac{1}{e}+\ln^3\frac{1}{e}+\ldots+\ln^n\frac{1}{e}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n,$$

який є знакозмінним рядом і оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n=1\neq 0$, то він є розбіжним (дивись п. 1.6). При $x=e$ ми отримаємо числовий знакосталий ряд з одиниць, який також є розбіжним.

Відповідь: заданий ряд збігається при $\frac{1}{e}<x<e$.

2.1.2 Рівномірна збіжність функціонального ряду. Ознака Вейєрштраса

Словесне формулювання	Аналітичний запис, графічне зображення
Функціональний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ збігається на деякому проміжку D *рівномірно*, якщо, яке б не було $\varepsilon<0$, можна знайти таке	$\lvert R_n(x)\rvert<\varepsilon$ або $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0,\ \forall x\in D$

N, яке не залежить від x, що при $n > N$ для усіх x з даного проміжку виконується нерівність	
Геометрично рівномірна збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на проміжку $[a,b]$ означає, що графіки всіх n-х часткових сум $S_n(x)$ для $x \in [a,b]$, з номерами $n > N$ розмістяться на всьому проміжку всередині ε-смуги, що обмежена кривими $y = S_n(x) + \varepsilon$ та $y = S_n(x) - \varepsilon$	

Зауваження 20. Практично це означає, що суму $S_n(x)$ на проміжку $x \in [a,b]$ можна наближено, з наперед заданою точністю, замінити однією і тією ж частковою сумою $S_n(x)$: $S_n(x) \approx S(x)$, $x \in [a,b]$.

У випадку нерівномірно збіжного ряду на відрізку $[a,b]$, обчислення суми $S_n(x)$ для різних значень $x \in [a,b]$ за допомогою певної часткової суми $S_n(x)$ з однаковою точністю неможливе, тобто для різних значень x треба брати різну кількість членів в часткових сумах $S_n(x)$.

Ознака Вейєрштраса. Якщо $|u_n(x)| \le c_n$ $(n = 1,2,\ldots)$ при $a < x < b$ і числовий знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ збігається, то

функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається на відрізку $[a,b]$ абсолютно й рівномірно
Зауваження 21. Збіжний знакододатний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ називається *мажорантою*, а функціональний ряд для якого існує мажоранта називається *мажоруємим* функціональним рядом
ПРИКЛАД 27. Дослідити рівномірну збіжність ряду $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$ *Розв'язання*. Заданий ряд рівномірно збігається на всій осі $0x$, оскільки для всіх значень x виконується умова $\lvert u_n(x)\rvert \le c_n$ або $\frac{\cos nx}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$, $(n=1,2,...)$, а, як відомо, числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ є збіжним (тобто є мажорантой для заданого ряду). *Відповідь*: ряд рівномірно збігається на всій осі $0x$.
ПРИКЛАД 25. Знайти область збіжності та область рівномірної збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n \cdot (x+2)^n}$. *Розв'язання*. Запишемо для заданого функціонального ряду $$u_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n \cdot (x+2)^n},\ u_{n+1} = (-1)^{n+2} \frac{1}{(n+1) \cdot (x+2)^{n+1}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}}{(-1)^{n+1}}\cdot\frac{n\cdot(x+2)^n}{(n+1)\cdot(x+2)^{n+1}}\right|=\frac{1}{|x+2|}.$$

За ознакою Даламбера функціональний ряд збігається якщо $\frac{1}{|x+2|}<1$, тобто $1<|x+2|$, $-1>x+2>1$, звідси $x>-1$ та $x<-3$, таким чином, ряд збігається при $x\in(-\infty,-3)\cup$ $\cup\ x\in(-1,\infty)$.

Перевіримо збіжність у граничних точках, тобто при $x=-1$ та $x=-3$.

У випадку коли $x=-3$, ми отримаємо гармонічний ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+...$, який розбігається; а при $x=-1$ ряд $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-...-\frac{1}{n}-...$, який умовно збігається (за теоремою Лейбніца).

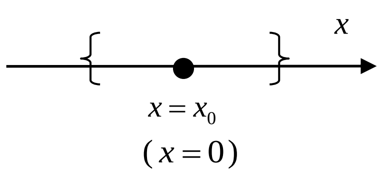
Відповідь: заданий ряд збігається при $x\in(-\infty,-3)\cup$ $\cup\ x\in(-1,\infty)$ і рівномірно збігається при $x\in(-\infty,-3-\delta)\cup\ x\in[-1,\infty)$ для будь-якого δ.

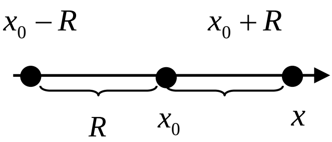
Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів	
У рівномірно збіжних рядах з неперервними на множині D членами $u_n(x)$, можливий почленний перехід до границі	$\lim\limits_{x\to x_0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lim\limits_{x\to x_0}u_n(x)$, $x_0\in D$
Рівномірно збіжний ряд на відрізку $[a,b]$ неперервних функцій можна почленно інтегрувати.	$\int\limits_{x_0}^{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(t)dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{x_0}^{x}u_n(t)dt$, $[x_0,x]\subset[a,b]$

Ряд із неперервних функцій, що рівномірно збігається, можна почленно диференціювати, якщо після цього одержується ряд, який збігається рівномірно. Тобто можна переставляти операції диференціювання та сумування.	$\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n{}'(x)$, $x \in [a,b]$

2.2 Степеневі ряди

2.2.1 Степеневий ряд та його властивості

Словесне формулювання	Аналітичний запис, графічне зображення
Степеневий ряд – це функціональний ряд, який має вигляд	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ або $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, де a_n – коефіцієнти елементів ряду ($a_n = const$)
Інтервал збіжності степеневого ряду – це інтервал числової осі, симетричний відносно точки $x = x_0$ ($x = 0$), яким може бути як закритим так й відкритим, а також, вироджуватися в точку або всю вісь $0x$	

Інтервал збіжності степеневого ряду – такий інтервал від $x_0 - R$ до $x_0 + R$ (або від $-R$ до $+R$) що для будь-якої внутрішньої точки x цього інтервалу ряд збігається й причому абсолютно, а для всіх точок x зовні цього інтервалу ряд розбігається. Число R називають *радіусом збіжності степеневого ряду*	
Радіус збіжності степеневого ряду можна знайти за формулами	$R = \lim\limits_{n\to\infty}\left\|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right\|$ або $R = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$

Основні властивості степеневих рядів

1. Сума степеневого ряду є неперервна функція у всіх внутрішніх точках інтервалу збіжності $(-R,+R)$, причому, якщо степеневий ряд збігається на кінцях інтервалу, то неперервність зберігається й при цих значеннях.
2. Степеневий ряд можна почленно диференціювати, при цьому радіус збіжності утвореного ряду не змінюється.
3. Степеневий ряд можна почленно інтегрувати, при цьому радіус збіжності утвореного ряду не змінюється.

ПРИКЛАД 26. Знайти суму ряду

$$S(x) = x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$$

Розв'язання. Визначимо радіус збіжності ряду

$$a_n = \frac{1}{n},\ a_{n+1} = \frac{1}{n+1},\ R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| = 1.$$

Перевіримо граничні точки. При $x = -1$ знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ згідно з ознакою Лейбніца збігається умовно; при $x = 1$ маємо гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, який розбігається.

Таким чином, заданий ряд збігається на інтервалі $[-1,1)$.

Знайдемо суму ряду на області збіжності.

Продиференцюємо заданий ряд почленно:

$$S'(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots$$

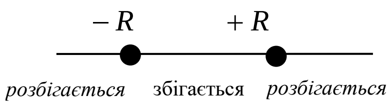
Це є нескінченно спадаюча геометрична прогресія зі знаменником $|x| < 1$

$$S'(x) = \frac{1}{1-x},\ S(x) = \int \frac{1}{1-x}dx = -\ln|1-x| + C.$$

Постійну C знайдемо з умови що $S(0) = 0$, тоді $C = 0$.

Відповідь: сума заданого ряду $S(x) = -\ln|1-x|$.

2.2.2 Область збіжності степеневого ряду. Теорема Абеля.

<table>
<tr><th>Словесне формулювання</th><th>Аналітичний запис, графічне зображення</th></tr>
<tr><td>Теорема Абеля: 1) якщо степеневий ряд збігається при деякому значенні $x = x_0$, то він абсолютно збігається при будь-якому значені x, для якого $|x| < |x_0|$; 2) якщо ряд розбігається при деякому значенні $x = x_1$, то він розбігається при будь-якому значені x, для якого $|x| > |x_1|$</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Зауваження 22. З теореми Абеля зрозуміло існування інтервалу збіжності степеневого ряду $(-R, R)$. Іншими словами, ряд збігається при $|x| < R$ і розбігається при $|x| > R$. У точках $x = \pm R$ необхідні додаткові дослідження для кожного випадку. Інтервал збіжності може вироджуватися у точку $R = 0$ або співпадати з віссю $0x$: $R = \infty$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Зауваження 23. Визначення області визначення степеневих рядів у яких степеня x розташовані строго послідовно, базується на застосуванні ознаки Даламбера (або інших ознак) і приводиться до застосування формул

$$|x - x_0| < R \text{ або } |x| < R,$$</td></tr>
</table>

де радіус збіжності знаходять за вищезазначеними формулами (п. 2.2.1)

ПРИКЛАД 27. Визначити інтервал збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

Розв'язання. Цей ряд є повним степеневим рядом, оскільки степеня x розташовані строго послідовно. Обчислимо радіус збіжності для заданого ряду за формулою $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}},\ a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}},\ R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \right| = 1,$$

тоді для всіх $|x| < 1$ ряд збігається, тобто для $-1 < x < 1$. Дослідимо збіжність у граничних точках інтервалу збіжності. При $x = -1$ ми отримаємо числовий знакопочерговий ряд $-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$, який за ознакою Лейбніца збігається; при $x = 1$ маємо знакододатний числовий ряд $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$, який є узагальненим гармонічним рядом й розбігається.

Відповідь: інтервал збіжності заданого ряду $[-1,1)$.

ПРИКЛАД 28. Визначити інтервал збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}.$$

Розв'язання. Заданий ряд містить тільки непарні степені x, тому він є неповним. Знайдемо інтервал збіжності за ознакою Даламбера:

$$u_n = (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!},\ u_{n+1} = (-1)^{n+2}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}(2n-1)(2n-1)!}{x^{2n-1}(2n+1)(2n+1)!}\right| = x^2\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n(2n+1)^2} < 1,$$

тобто $x^2 < \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n(2n+1)^2}{2n-1}$, $x^2 < \infty$, $|x| < \infty$, $-\infty < x < \infty$.

Відповідь: ряд збігається для будь-якого значення x.

ПРИКЛАД 29. Визначити інтервал збіжності ряду

$$10x + 100x^2 + 1000x^3 + \ldots + 10^n x^n + \ldots$$

Розв'язання. Це повний степеневий ряд, розташований за степенями x. Знайдемо радіус збіжності за формулою $R = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{a_n}}$ при $a_n = 10^n$, маємо $R = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{10^n}} = \dfrac{1}{10}$. Тож, для всіх $x \in \left(-\dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{10}\right)$ ряд збігається. Перевіримо граничні точки $x = -\dfrac{1}{10}$ та $x = \dfrac{1}{10}$. При $x = -\dfrac{1}{10}$ отримаємо знакочерговий розбіжний числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, оскільки

$\lim\limits_{n\to\infty}\left\|u_n\right\| = 1 \neq 0$. При $x = \dfrac{1}{10}$ отримаємо знакододатний ряд з одиниць, який за необхідною ознакою також розбігається. *Відповідь*: областю збіжності заданого ряду є інтервал $\left(-\dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{10}\right)$.

2.2.3 Формула і ряд Тейлора

Словесне формулювання	Аналітичний запис, графічне зображення
Зауваження 24. Формула Тейлора дозволяє вирішувати проблему наближеного обчислення значення функції, за допомогою заміни самої функції на більш просту функцію, у деякому сенсі близької до даної функції. У випадку формули Тейлора цією допоміжною функцією є многочлен	
Формулой Тейлора порядка n функции $f(x)$ в точке a называется формула	$f(x) = f(a) + \dfrac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$ або $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x)$ де $R_n(x)$ остаточный член в форме Лагранжа і обчислюється $R_n(x) = \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)), 0 < \theta < 1$, $\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ – *коефіцієнти Тейлора*

Зауваження 25 Якщо функція $f(x)$ має похідні усіх порядків у околі точки $x=a$, то в формулі Тейлора число n можна брати скільки завгодно великим

Нескінчений *ряд Тейлора* ($\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$)	$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$

Зауваження 26. Якщо необхідна й достатня умова $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$ розкладання функції $f(x)$ в степеневий ряд Тейлора не виконується, то степеневий ряд не представляє даної функції. Але відмітимо, що для кожної з функцій існує таке a та таке R, що в інтервалі $(a-R,a+R)$ її можна розкласти в ряд Тейлора

ПРИКЛАД 30. Розкласти функцію $f(x)=\ln x$ в ряд Тейлора в околі точки $x=1$.

Розв'язання. Обчислимо значення функції та її похідних у точці $x=1$:

$$f(x)=\ln x,\ f(1)=\ln 1=0;\ f'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x},\ f'(1)=1;$$

$$f''(x)=\left(x^{-1}\right)'=-x^{-2},\ f''(1)=-1;\ f'''(x)=\left(-x^{-2}\right)'=1\cdot 2x^{-3},$$

$$f'''(1)=2;\ f^{IV}(x)=\left(2x^{-3}\right)'=1\cdot 2\cdot(-3)x^{-4},\ f^{IV}(1)=1\cdot 2\cdot(-3);$$

$$\ldots\ f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\cdot x^{-n},\ f^{(n)}(1)=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!;\ \ldots$$

Підставимо ці значення в ряд Тейлора.

Отримаємо *відповідь*:

$$\ln x = 0 + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2!(x-1)^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!(x-1)^n}{n!} + \ldots =$$

$$= x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}\cdot(x-1)^n}{n} + \ldots \ .$$

2.2.4 Ряд Маклорена. Розкладання основних елементарних функцій в ряд Маклорена

Словесне формулювання	Аналітичний запис, графічне зображення
У випадку коли ряд Тейлора розглядається у точці $a = 0$ ми отримаємо *ряд Маклорена*	$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f'(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$

Розкладання елементарних функцій в ряд Маклорена

- *Показникова функція*:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \ x \in (-\infty, \infty)$$

- *Тригонометричні функції:*

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \ x \in (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \ x \in (-\infty, \infty)$$

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \ldots, \ x \in [-1, 1]$$

- *Логарифмічні функції:*

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots,\ x\in(-1,1]$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right),\ x<1$$

- *Степеневі функції:*

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)x^2}{2!}+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)x^n}{n!}+\ldots,\ |x|<1$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots,\ |x|<1$$

ПРИКЛАД 31. Розкласти функцію $f(x)=e^{2x}$ в околі точки $x=0$.

Розв'язання. Застосуємо розкладання в ряд Маклорена для показникової функції, виконавши заміну x на $2x$

$$e^{2x}=1+\frac{2x}{1!}+\frac{(2x)^2}{2!}+\ldots+\frac{(2x)^n}{n!}+\ldots=1+2x+\frac{2^2x^2}{2!}+\ldots+\frac{2^nx^n}{n!}+\ldots$$

ПРИКЛАД 32. Розкласти функцію $f(x)=\ln(10+x)$ в околі точки $x=0$.

Розв'язання. Застосуємо розкладання в ряд Маклорена функції $\ln(1+x)$. Виконаємо деякі перетворення

$$f(x)=\ln(10+x)=\ln 10\left(1+\frac{x}{10}\right)=\ln 10+\ln\left(1+\frac{x}{10}\right).$$

Зробимо заміну x на $\frac{x}{10}$ в розкладанні в ряд Маклорена функції $\ln(1+x)$

$$\ln\left(1+\frac{x}{10}\right)=\frac{x}{10}-\frac{\left(\frac{x}{10}\right)^2}{2}+\frac{\left(\frac{x}{10}\right)^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{\left(\frac{x}{10}\right)^n}{n}+\ldots$$

$$\ln 10+\ln\left(1+\frac{x}{10}\right)=\ln 10+\left[\frac{x}{10}-\frac{x^2}{2\cdot 10^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{10^n n}+\ldots\right].$$

ПРИКЛАД 33. Розкласти функцію $\frac{6x}{2-3x}$ в околі точки $x=0$ та знайти область збіжності ряду.

Розв'язання. Застосуємо розкладання в ряд Маклорена

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots,$$

але спочатку виконаємо деякі перетворення. По-перше, у чисельнику має бути одиниця; по-друге, в знаменнику отримаємо вираз $1-x$. Тож,

$$\frac{6x}{2-3x}=6x\cdot\frac{1}{2-3x}=6x\cdot\frac{1}{2\left(1-\frac{3}{2}x\right)}=3x\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{2}x}.$$

Отримаємо таке розкладання заданої функції у такий степеневий ряд

$$3x\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{2}x}=3x\cdot\left(1+\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}x^2+\ldots+\frac{3^n}{2^n}x^n+\ldots\right)=$$

$$=3x+\frac{9}{2}x^2+27x^3+\ldots+\frac{3^{n+1}}{2^n}x^{n+1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{2^n}x^{n+1}.$$

Визначимо область збіжності ряду. Для цього скористаємось ознакою Даламбера для отриманого степеневого ряду. Але якщо взяти до уваги, з формули розкладання функції $\frac{1}{1-x}$ у ряд Маклорена, той факт, що біноміальний ряд збігається коли $|x|<1$, тобто у нашому випадку це буде нерівність виду $\left|\frac{3}{2}x\right|<1$. Після перетворень цієї нерівності інтервалом збіжності отриманого ряду буде $-\frac{2}{3}<x<\frac{2}{3}$. З'ясуємо, що відбувається на кінцях цього інтервалу. При $x=\frac{2}{3}$, підставляємо замість x значення $\frac{2}{3}$, ми маємо такий степеневий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{2^n}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{2^n}\cdot\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}=2\sum_{n=1}^{\infty}1^n ,$$

який розбігается, оскільки не виконується необхідна ознака, тобто

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0,\ \text{але}\ \lim_{n\to\infty}1^n\neq 0 .$$

При $x=-\frac{2}{3}$ ми отримуємо степеневий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{2^n}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{2^n}\cdot\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}\cdot(-1)^{m+1}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$$

який також розбігається за ознакою Лебніца.

Таким чином, область збіжності отриманого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{2^n}x^{n+1}$ є інтервал $-\frac{2}{3}<x<\frac{2}{3}$.

2.2.5 Застосування степеневих рядів у наближених обчисленнях

<table>
<tr><td>Словесне формулювання</td><td>Аналітичний запис, графічне зображення</td></tr>
<tr><td colspan="2">Обчислення значення функції</td></tr>
<tr><td colspan="2">

ПРИКЛАД 34. Користуючись формулою розкладання в ряд Маклорена функції $(1+x)^m$, обчислити $\sqrt[3]{30}$ з точністю $0{,}001$.

Розв'язання. Представимо число 30 як:

$$30 = 27 + 3 = 3^3 + 3 = 3^3\left(1 + \frac{1}{3^2}\right),\ \sqrt[3]{30} = \sqrt[3]{3^3\left(1 + \frac{1}{3^2}\right)} = 3\left(1 + \frac{1}{9}\right)^{1/3}.$$

Розкладемо $\left(1 + \frac{1}{9}\right)^{1/3}$ в біноміальний ряд, де $x = \frac{1}{9}$, $m = \frac{1}{3}$.

$$\left(1 + \frac{1}{9}\right)^{1/3} = 1 + \cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{2!}\cdot\frac{1}{9^2} + \ldots + \frac{2}{9}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{9^3} + \ldots = 1 + 0{,}0370 -$$
$$- 0{,}0014 + 0{,}00008 - \ldots$$

$$\left(1 + \frac{1}{9}\right)^{1/3} = 3\cdot(1 + 0{,}0370 - 0{,}0014 + 0{,}00008 - \ldots) = 3\cdot 1{,}0357 =$$

$$= 3{,}1071 \approx 3{,}107.$$

Відповідь: $\sqrt[3]{30} \approx 3{,}107$.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Обчислення границь функцій</td></tr>
<tr><td colspan="2">

ПРИКЛАД 35. Знайти границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin\, x}{x^2\left(e^x - 1\right)}.$$

</td></tr>
</table>

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\ldots\right)-\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\ldots\right)}{x^2\left(\dfrac{2x}{1!}+\dfrac{(2x)^2}{2!}+\ldots\right)}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{60}x+\ldots}{x^3\left(1+\dfrac{x}{2}+\ldots\right)}=-\frac{1}{3}.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2\left(e^x-1\right)}=-\dfrac{1}{3}$.

Обчислення визначених інтегралів

ПРИКЛАД 36. Обчислити наближено значення визначеного інтегралу $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\dfrac{\cos x}{x}dx$, беручи три члена розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд та оцінити похибку.

Розв'язання. Для обчислення інтегралу розглянемо розклад в ряд Маклорена підінтегральної функції

$$\frac{\cos x}{x}=\frac{1}{x}\cdot\cos x=\frac{1}{x}\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right]=$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{x}{2!}+\frac{x^3}{4!}-\frac{x^5}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n)!}+\ldots$$

Оскільки цей ряд знакозмінний, то похибка результату буде менше абсолютного значення першого відкинутого члену (на основі теореми Лейбніца), тобто

$$\left|R_n\right| < \int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{x^5}{6!}dx = \frac{x^6}{6\cdot 6!}\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{\pi^6}{6\cdot 6!}\left(\frac{1}{4^6}-\frac{1}{6^6}\right) = \frac{133\pi^6}{2^{17}\cdot 3^9} \approx 0{,}00005 \approx 0{,}0001.$$

Звідси маємо, що кожний доданок треба брати з п’ятьма цифрами після коми, потім округлити результат обчислений до чотирьох цифр.

$$\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x}{x}dx = \int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{24}-\ldots\right)dx = \left(\ln x - x^2 + \frac{x^4}{96}\right)\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/4} =$$

$$= \ln\frac{\pi}{4} - \ln\frac{\pi}{6} - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{\pi^4}{4^4\cdot 96} - \frac{\pi^4}{6^4\cdot 96} =$$

$$= \ln\frac{3}{2} - 0{,}08657 + 0{,}00319;\ \ln\frac{3}{2} = \ln 1{,}5 = \ln(1+0{,}5),$$

$$\ln(1+0{,}5) = 0{,}5 - \frac{0{,}5^2}{2} + \frac{0{,}5^3}{3} - \frac{0{,}5^4}{4} + \frac{0{,}5^5}{5} - \frac{0{,}5^6}{6} + \ldots =$$

$$= 0{,}5 - 0{,}125 + 0{,}04167 - 0{,}01563 + 0{,}00625 - 0{,}00260 + 0{,}00112 -$$

$$- 0{,}00049 + 0{,}00022 - 0{,}00010 + 0{,}00002 = 0{,}40546.$$

Остаточно маємо

$$\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x}{x}dx = 0{,}40546 - 0{,}08567 + 0{,}00319 = 0{,}32298 \approx 0{,}3230.$$

Відповідь: $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x}{x}dx \approx 0{,}3230$.

Рішення диференціального рівняння
Зауваження 27. Відомо, що інтеграл диференціального рівняння не завжди можна представити за допомогою елементарних функцій або кінцевого числа інтегрувань (квадратур). Інтеграли (рішення) таких рівнянь можуть бути представлені у вигляді степеневого ряду збіжного у деякому інтегралі значень незалежної змінної. Для цього застосовують або метод невизначених коефіцієнтів (для лінійних рівнянь), або методом послідовного диференціювання (додатки А, Б).

Шуканий *розв'язок рівняння* $y' = f(x, y)$ в околі точки x_0, в якій задані початкові умови, можна розвинути в ряд	$y(x) = y(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, де значення $y(x_0) = y_0$ задано початковою умовою

Зауваження 28. За цією ж формулою можна знаходити наближений розв'язок рівняння будь-якого порядку $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n)})$ за початковими умовами $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0, \ldots,$ $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.
ПРИКЛАД 37. Знайти шість перших членів розкладу в степеневий ряд рішення диференціального рівняння $y'' - (1 + x^2)y = 0$, яке задовольняє початковим умовам $y(0) = -2$, $y'(0) = 2$. *Розв'язання*. Оскільки задане диференціальне рівняння є лінійним, тож його рішення запишемо у вигляді степеневого ряду з невизначеними коефіцієнтами

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots,$$

диференцюємо це рішення, отримаємо

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \dots$$

$$y''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \dots\ .$$

З початкових умов знаходимо: $a_0 = -2$, $a_1 = 2$.

Підставимо y та y'' в задане рівняння та отримаємо тотожність

$$2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \dots - \left(1 + x^2\right)\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \right.$$

$$\left. + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \dots\right) = 0\,.$$

Згрупуємо в лівій частині отриманого рівняння члени з однаковими степенями x та прирівняємо до нуля коефіцієнтами при цих степенях, маємо

$$2a_2 - a_0 = 0, \qquad \text{звідси} \quad a_2 = \frac{a_0}{2} = 1;$$

$$6a_3 - a_1 = 0, \qquad \text{звідси} \quad a_3 = \frac{a_1}{2} = \frac{1}{3};$$

$$12a_4 - a_0 - a_2 = 0, \qquad \text{звідси} \quad a_4 = \frac{a_0 + a_2}{12} = -\frac{1}{4};$$

$$20a_5 - a_1 - a_3 = 0, \qquad \text{звідси} \quad a_5 = \frac{a_1 + a_3}{20} = \frac{7}{60} \dots\ .$$

Підставимо знайдені коефіцієнти і одержимо шукане рішення

$$y(x) = -2 + 2x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{60}x^5 + \dots\ .$$

3 РЯДИ ФУР'Є

3.1 Розкладання 2π-періодичних функцій у ряд Фур'є

Словесне формулювання	Аналітичний запис, графічне зображення
Рядом Фур'є періодичної функції $f(x)$ з періодом $T = 2\pi$, визначеної на сегменті $[-\pi, \pi]$ називається ряд вигляду	$f(x) = \frac{a_0}{2} +$ $+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, де a_0, a_n, b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ – *коефіцієнти Фур'є*
Коефіцієнти Фур'є можна знайти за *формулами Ейлера-Фур'є*	$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$
Сума ряду Фур'є: 1) в точках неперервності функції $f(x)$: 2) в точках розриву x_0 функції $f(x)$:	1) $S(x) = f(x)$ 2) $S(x) = \frac{1}{2}\Big[\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) +$ $+ \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)\Big]$
Зауваження 29. Інтеграли у формулах для коефіцієнтів Фур'є можна обчислювати на довільному проміжку	

$[a, a+2\pi]$, довжина якого дорівнює періоду $T = 2\pi$ функції $f(x)$

Зауваження 30. Швидкість збіжності ряду Фур'є тим більша, чим гладкіша функція $f(x)$

Зауваження 31. Часткова сума S_n ряду Фур'є є найкращим середньо квадратичним наближенням функції $f(x)$ серед тригонометричних многочленів відповідного вигляду

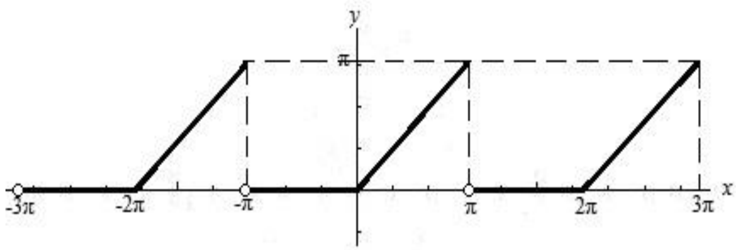
Зауваження 32. Ряди Фур'є можна використовувати для знаходження сум числових рядів. Якщо x_0 – точка неперервності функції $f(x)$, то за теоремою Діріхле:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0) = f(x_0) - \frac{a_0}{2}$$

ПРИКЛАД 38. Розвинути в ряд Фур'є 2π-періодичну функцію

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \le 0; \\ x, & 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

Розв'язання. Задана функція кусково-монотонна на проміжку $[-\pi, \pi]$, тому її можна розкласти в ряд Фур'є.



Отже, задача зводиться до знаходження коефіцієнтів Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0dx + \int_{0}^{\pi} xdx\right) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\cos nx dx + \int_{0}^{\pi} x\cos nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos nx dx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(x\cdot\frac{1}{n}\sin nx\bigg|_0^{\pi} - \int_{0}^{\pi}\frac{1}{n}\sin nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\pi\cdot\frac{1}{n}\sin \pi n - 0 - \frac{1}{n}\cdot\int_{0}^{\pi}\sin nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\pi\cdot\frac{1}{n}\cdot 0 - \frac{1}{n}\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\bigg|_0^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\cos nx\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi n^2}\cdot\left(\cos\pi n - \cos 0\right) = \frac{1}{\pi n^2}\cdot\left((-1)^n - 1\right) = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 0\cdot\sin nx dx + \int_{0}^{\pi} x\sin nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin nx dx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(x\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\pi\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos \pi n\right) - 0 + \frac{1}{n}\cdot\int_0^{\pi}\cos nx dx \right) = \frac{1}{\pi}\left(\pi\cdot\left(-\frac{1}{n}\cdot(-1)^n\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Bigg|_0^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}\cdot(-1)^{n+1} + \frac{1}{n^2}\cdot\left(\sin \pi n - \sin 0\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}\cdot(-1)^{n+1} + \frac{1}{n^2}\cdot 0\right) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{n}\cdot(-1)^{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Отже, розвинення заданої функції в ряд Фур’є має вигляд:

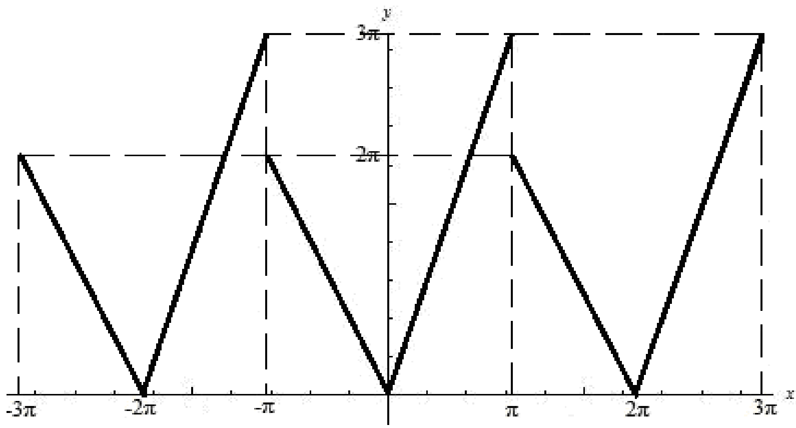
$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right)$$

ПРИКЛАД 39. Розвинути в ряд Фур’є періодичну функцію

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & -\pi \le x \le 0; \\ 3x, & 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Розв’язання. Задана функція кусково-монотонна на проміжку $[-\pi, \pi]$, тому її можна розкласти в ряд Фур'є.

Графік цієї функції можна представити так



Знайдемо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(-2x)dx + \int_{0}^{\pi} 3x dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-2\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_{-\pi}^{0} + 3\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\left(0-(-\pi)^2\right) + \frac{3}{2}\cdot\left(\pi^2 - 0\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\pi^2 + \frac{3\pi^2}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{5\pi^2}{2} = \frac{5\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left(-2\int_{-\pi}^{0} x\cos nx dx + 3\int_{0}^{\pi} x\cos nx dx\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos nx dx & v = \dfrac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix} = -\frac{2}{\pi}\left(x\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0}\frac{1}{n}\sin nx dx\right) +$$

$$+\frac{3}{\pi}\left(x\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi}\frac{1}{n}\sin nx dx\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(0-(-\pi)\cdot\frac{1}{n}\sin(-\pi)n - \frac{1}{n}\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Big|_{-\pi}^{0}\right) +$$

$$+\frac{3}{\pi}\left(\pi\cdot\frac{1}{n}\sin\pi n - 0 - \frac{1}{n}\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Big|_{0}^{\pi}\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(0+\frac{1}{n^2}\cdot\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}\right) + \frac{3}{\pi}\left(0+\frac{1}{n^2}\cdot\cos nx\Big|_{0}^{\pi}\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\cdot\left(\cos 0 - \cos(-\pi)n\right)\right) + \frac{3}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\cdot\left(\cos\pi n - \cos 0\right)\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right) + \frac{3}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) + \frac{3}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) = \frac{5}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left(-2\int_{-\pi}^{0} x\sin nx dx + 3\int_{0}^{\pi} x\sin nx dx\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin nx dx & v = -\dfrac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(x\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos nx \right)\Bigg|_{-\pi}^{0} - \int\limits_{-\pi}^{0}\left(-\frac{1}{n}\cos nx \right)dx \right) +$$

$$+\frac{3}{\pi}\left(x\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos nx \right)\Bigg|_{0}^{\pi} - \int\limits_{0}^{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos nx \right)dx \right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(0-(-\pi)\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos(-\pi)n \right) + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Bigg|_{-\pi}^{0} \right) +$$

$$+\frac{3}{\pi}\left(\pi\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos\pi n \right) - 0 + \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Bigg|_{0}^{\pi} \right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}(-1)^{n} + \frac{1}{n^{2}}\cdot\left(\sin 0 - \sin(-\pi)n\right) \right) +$$

$$+\frac{3}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cdot(-1)^{n} + \frac{1}{n^{2}}\cdot\left(\sin\pi n - \sin 0\right) \right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}(-1)^{n} + \frac{1}{n^{2}}\cdot 0 \right) + \frac{3}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cdot(-1)^{n} + \frac{1}{n^{2}}\cdot 0 \right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}(-1)^{n} \right) + \frac{3}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cdot(-1)^{n} \right) = \frac{2}{n}\cdot(-1)^{n} - \frac{3}{n}\cdot(-1)^{n} =$$

$$= -\frac{1}{n}\cdot(-1)^{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Отже, розвинення заданої функції в ряд Фур’є має вигляд:

$$f(x) = \frac{5\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{\pi n^{2}}\left((-1)^{n}-1\right)\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx \right)$$

3.2 Розкладання 2*l*-періодичних функцій у ряд Фур'є

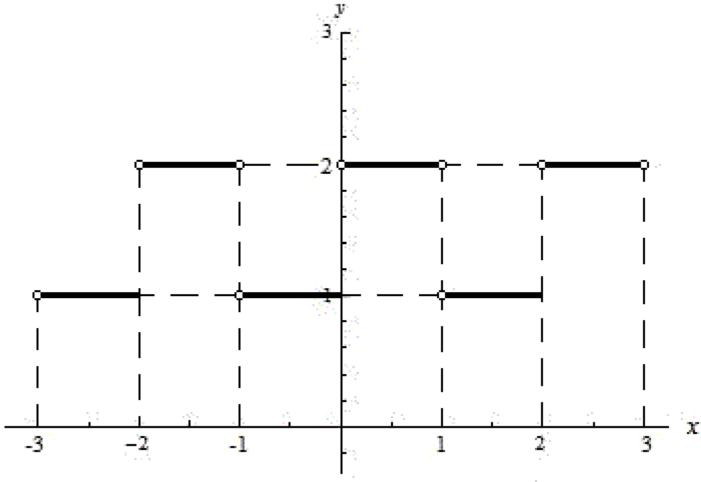
Словесне формулювання	Аналітичний запис, графічне зображення
Рядом Фур'є періодичної функції $f(x)$ з періодом $T=2l$, визначеної на сегменті $[-l,l]$ називається ряд вигляду	$f(x)=\frac{a_0}{2}+$ $+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\right)$, де a_0, a_n, b_n $(n=1,2,...)$ – *коефіцієнти Фур'є*
Коефіцієнти Фур'є можна знайти за *формулами Ейлера-Фур'є*	$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx$, $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx$, $b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx$

ПРИКЛАД 40. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію

$$f(x)=\begin{cases}1, & -1<x\le 0;\\ 2, & 0<x<1\end{cases}$$

з періодом 2, задану на відрізку $[-1,1]$.

Розв'язання. Графік заданої функції має вигляд:



Знайдемо коефіцієнти Фур'є:

$$l = 1,$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{1}{1}\left(\int_{-1}^{0} dx + \int_{0}^{1} 2dx\right) = x\Big|_{-1}^{0} + 2\cdot x\Big|_{0}^{1} =$$

$$= 0 - (-1) + 2\cdot(1-0) = 1 + 2 = 3,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{1}{1}\left(\int_{-1}^{0}\cos\frac{\pi nx}{1}dx + \int_{0}^{1} 2\cos\frac{\pi nx}{1}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{1}\Big|_{-1}^{0} + 2\cdot\frac{1}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{1}\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{\pi n}\left(\sin 0 - \sin(-\pi n)\right) +$$

$$+ 2\cdot\frac{1}{\pi n}\left(\sin \pi n - \sin 0\right) = \frac{1}{\pi n}\cdot 0 + 2\cdot\frac{1}{\pi n}\cdot 0 = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{1}{1}\left(\int_{-1}^{0}\sin\frac{\pi nx}{1}dx + \int_{0}^{1} 2\sin\frac{\pi nx}{1}dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{1}\Big|_{-1}^{0} + 2\cdot\left(-\frac{1}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{1}\right)\Big|_{0}^{1} = -\frac{1}{\pi n}\left(\cos 0 - \cos(-\pi n)\right) +$$

$$+ 2\cdot\left(-\frac{1}{\pi n}\left(\cos\pi n - \cos 0\right)\right) = -\frac{1}{\pi n}\cdot\left(1-(-1)^n\right) +$$

$$+ 2\cdot\left(-\frac{1}{\pi n}\cdot\left((-1)^n - 1\right)\right) = -\frac{1}{\pi n}\cdot\left(1-(-1)^n\right) +$$

$$+ \frac{2}{\pi n}\cdot\left(1-(-1)^n\right) = \frac{1-(-1)^n}{\pi n}.$$

Отже, розвинення заданої функції в ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{\pi n}\sin\pi n x$$

ПРИКЛАД 41. Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію

$$f(x) = \begin{cases} -3, & -1 < x \le 0; \\ 0, & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

з періодом 2, задану на відрізку $[-1,1]$. Зобразити графік суми ряду.

Розв'язання. Знайдемо коефіцієнти Фур'є:

$$l = 1,$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{1}{1}\left(\int_{-1}^{0}(-3)dx + \int_{0}^{1} 0dx\right) = -3\cdot x\Big|_{-1}^{0} =$$

$$= -3\cdot(0-(-1)) = -3\cdot 1 = -3,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}\,dx = \frac{1}{1}\left(\int_{-1}^{0}(-3)\cos\frac{\pi nx}{1}\,dx + \int_{0}^{1} 0\cdot\cos\frac{\pi nx}{1}\,dx\right) =$$

$$= -3\cdot\frac{1}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{1}\bigg|_{-1}^{0} = -\frac{3}{\pi n}\left(\sin 0 - \sin(-\pi n)\right) = -\frac{3}{\pi n}\cdot 0 = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx = \frac{1}{1}\left(\int_{-1}^{0}(-3)\sin\frac{\pi nx}{1}\,dx + \int_{0}^{1} 0\cdot\sin\frac{\pi nx}{1}\,dx\right) =$$

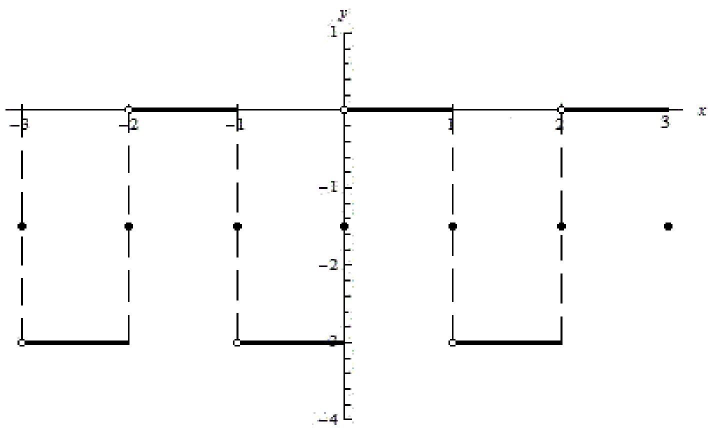
$$= -3\cdot\left(-\frac{1}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{1}\right)\bigg|_{-1}^{0} = \frac{3}{\pi n}\left(\cos 0 - \cos(-\pi n)\right) = \frac{3}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)$$

.

Отже, розвинення заданої функції в ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) = -\frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n}\cdot\sin\pi nx\,.$$

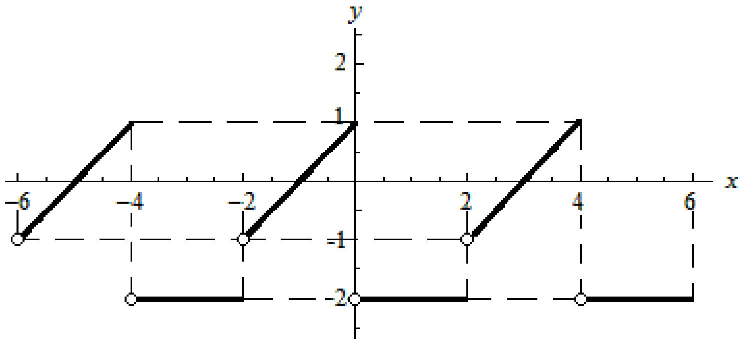
Графік суми ряду $S(x)$ має наступний вигляд:



ПРИКЛАД 42. Розвинути в ряд Фур'є функцію

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & -2<x\le 0; \\ -2, & 0<x\le 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Графік заданої функції має вигляд:



Знайдемо коефіцієнти Фур'є:

$$l=2,$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx=\frac{1}{2}\cdot\left(\int_{-2}^{0}(x+1)dx+\int_{0}^{2}(-2)dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\int_{-2}^{0}xdx+\int_{-2}^{0}dx-2\cdot\int_{0}^{2}dx\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-2}^{0}+x\Big|_{-2}^{0}-2\cdot x\Big|_{0}^{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(0-\frac{(-2)^2}{2}+0-(-2)-2\cdot(2-0)\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(-2+2-4\right)=-2,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}(x+1)\cos\frac{\pi nx}{2}dx-2\int_{0}^{2}\cos\frac{\pi nx}{2}dx\right)=$$

$$=\begin{vmatrix} u=x+1 & du=dx \\ dv=\cos\frac{\pi nx}{2}dx & v=\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\left((x+1)\cdot\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_{-2}^{0}-\int_{-2}^{0}\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}dx-2\cdot\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_{0}^{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1\cdot\frac{2}{\pi n}\sin 0-(-1)\cdot\frac{2}{\pi n}\sin(-\pi n)-\frac{2}{\pi n}\cdot\left(-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\right)\Big|_{-2}^{0}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi n}\sin\pi n-\frac{4}{\pi n}\sin 0\right)=\frac{1}{2}\left(0+\frac{4}{\pi^2n^2}\cdot\cos\frac{\pi nx}{2}\Big|_{-2}^{0}\right)-\frac{1}{2}\cdot 0=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\pi^2n^2}\cdot(\cos 0-\cos(-\pi n))=\frac{2}{\pi^2n^2}\cdot\left(1-(-1)^n\right),$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}(x+1)\sin\frac{\pi nx}{2}dx-2\int_{0}^{2}\sin\frac{\pi nx}{2}dx\right)=$$

$$=\begin{vmatrix} u=x+1 & du=dx \\ dv=\sin\frac{\pi nx}{2}dx & v=-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\left((x+1)\cdot\left(-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\right)\Big|_{-2}^{0}-\int_{-2}^{0}\left(-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\right)dx\right)-$$

$$-\left(-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\right)\Big|_{0}^{2}=\frac{1}{2}\left(1\cdot\left(-\frac{2}{\pi n}\cos 0\right)-(-1)\cdot\left(-\frac{2}{\pi n}\cos(-\pi n)\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{\pi n}\cdot\int_{-2}^{0}\cos\frac{\pi nx}{2}dx-\left(-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\right)\Big|_{0}^{2}=\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{\pi n}-\frac{2}{\pi n}(-1)^n\right)+$$

$$+\frac{1}{\pi n}\cdot\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_{-2}^{0}+\frac{2}{\pi n}\left(\cos\pi n-\cos 0\right)=-\frac{1}{\pi n}\left(1+(-1)^n\right)+$$

$$+\frac{2}{\pi^2 n^2}\left(\sin 0-\sin(-\pi n)\right)+\frac{2}{\pi n}\left((-1)^n-1\right)=-\frac{1}{\pi n}\left(1+(-1)^n\right)+$$

$$+\frac{2}{\pi^2 n^2}\cdot 0+\frac{2}{\pi n}\left((-1)^n-1\right)=-\frac{1}{\pi n}-\frac{(-1)^n}{\pi n}+\frac{2(-1)^n}{\pi n}-\frac{2}{\pi n}=$$

$$=-\frac{3}{\pi n}+\frac{(-1)^n}{\pi n}=\frac{(-1)^n-3}{\pi n}.$$

Отже, розвинення заданої функції в ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x)=-1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\left(1-(-1)^n\right)}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi nx}{2}+\frac{(-1)^n-3}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\right)$$

3.3 Ряди Фур'є для парних і непарних періодичних функцій

Словесне формулювання	Аналітичний запис, графічне зображення
2π *-періодична функція*	
Ряд Фур'є *для парної* 2π -періодичної функції $f(x)$ має вигляд	$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$, де $a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx$,

	$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$
Ряд Фур'є *для непарної* 2π-періодичної функції $f(x)$ має вигляд	$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$ де $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$
$2l$*-періодична функція*	
Ряд Фур'є *для парної* $2l$-періодичної функції $f(x)$ має вигляд	$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l},$$ де $a_0 = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)dx,$ $$a_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx$$
Ряд Фур'є *для непарної* $2l$-періодичної функції $f(x)$ має вигляд	$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l},$$ де $b_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx$
Зауваження 33. Якщо функція $f(x)$ задана на сегменті $[0,l]$ (або $[0,\pi]$), то, для розвинення в ряд Фур'є достатньо продовжити її на сегмент $[-l,0]$ (або $[-\pi,0]$) довільним способом, а потім розкласти в ряд Фур'є, вважаючи, що вона задана на сегменті $[-l,l]$ (або $[-\pi,\pi]$).	

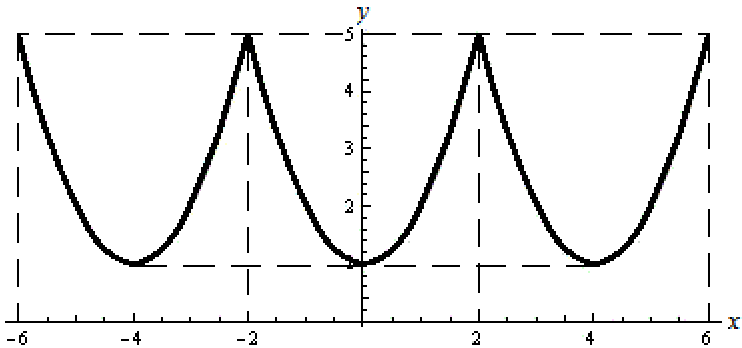
На практиці найчастіше перевага надається парному чи непарному продовженню функції $f(x)$, що приводить до неповного ряду Фур'є

ПРИКЛАД 43. Розвинути в ряд Фур'є функцію $f(x) = x^2 + 1$, задану на інтервалі $(-2,2)$.

Розв'язання. Задана функція є парною, тому що виконується умова

$$f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x).$$

Графік заданої функції має вигляд:



Знайдемо коефіцієнти Фур'є:

$$l = 2,$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx = \frac{2}{2}\int_0^2 (x^2+1)dx = \int_0^2 x^2 dx + \int_0^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 + \left.x\right|_0^2 =$$

$$= \frac{2^3}{3} + 2 = \frac{8}{3} + 2 = \frac{8+6}{3} = \frac{14}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{2}{2}\int_0^2(x^2+1)\cos\frac{\pi nx}{2}dx=$$

$$=\begin{vmatrix} u=x^2+1 & du=2xdx \\ dv=\cos\frac{\pi nx}{2}dx & v=\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\end{vmatrix}=(x^2+1)\cdot\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^2-$$

$$-\int_0^2\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\cdot 2xdx=5\cdot\frac{2}{\pi n}\sin\pi n-1\cdot\frac{2}{\pi n}\sin 0-$$

$$-\frac{4}{\pi n}\cdot\int_0^2 x\sin\frac{\pi nx}{2}dx=\begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=\sin\frac{\pi nx}{2}dx & v=-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\end{vmatrix}=$$

$$=0-\frac{4}{\pi n}\cdot\left(x\cdot\left(-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\right)\Big|_0^2-\int_0^2\left(-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\right)dx\right)=$$

$$=-\frac{4}{\pi n}\cdot\left(2\cdot\left(-\frac{2}{\pi n}\cos\pi n\right)-0+\frac{2}{\pi n}\cdot\int_0^2\cos\frac{\pi nx}{2}dx\right)=$$

$$=-\frac{4}{\pi n}\cdot\left(-\frac{4}{\pi n}\cos\pi n+\frac{2}{\pi n}\cdot\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\Big|_0^2\right)=$$

$$=-\frac{4}{\pi n}\cdot\left(-\frac{4}{\pi n}\cdot(-1)^n+\frac{4}{\pi^2n^2}\sin\pi n-\frac{4}{\pi^2n^2}\sin 0\right)=$$

$$=-\frac{4}{\pi n}\cdot\left(-\frac{4}{\pi n}\cdot(-1)^n+0\right)=\frac{16(-1)^n}{\pi^2n^2}.$$

Отже, розвинення заданої функції в ряд Фур’є має вигляд:

$$f(x)=\frac{7}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16(-1)^n}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi n x}{2}.$$

ПРИКЛАД 44. Розвинути в ряд Фур'є 2π-періодичну функцію $f(x)=x$, задану на сегменті $[-\pi,\pi]$.

Розв'язання. Задана функція є непарною, тому що виконується умова

$$f(-x)=-x=-f(x).$$

Знайдемо коефіцієнти Фур'є:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx=$$

$$=\begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=\sin nx\,dx & v=-\frac{1}{n}\cos nx \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(x\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Bigg|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\pi\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos \pi n\right)-0+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right)=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}(-1)^n\right)+$$

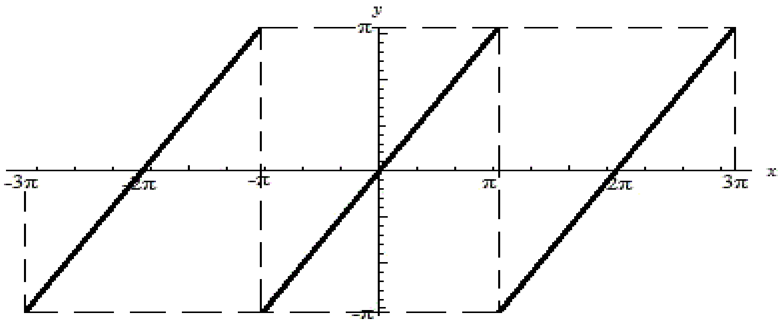
$$+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{\pi n^2}(\sin \pi n-\sin 0)=$$

$$=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}+\frac{2}{\pi n^2}\cdot 0=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Отже, розвинення заданої функції в ряд Фур'є має вигляд:

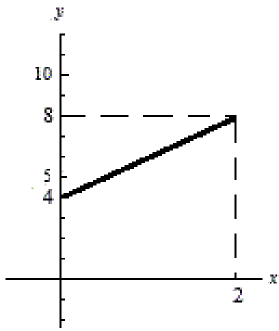
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\,.$$

Графік заданої функції має вигляд:



ПРИКЛАД 45. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=4+2x$, задану на сегменті $[0,2]$: 1) за синусами (непарне продовження), 2) за косинусами (парне продовження).

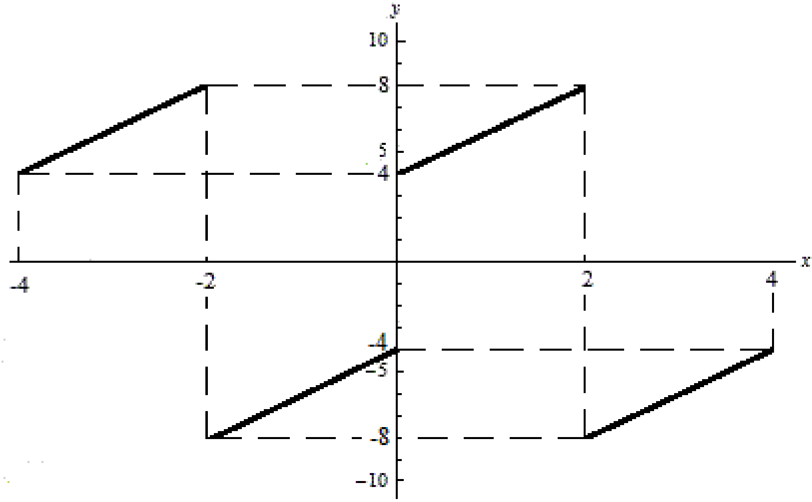
Розв'язання. Графік заданої функції має вигляд:



1) Продовжимо функцію непарним способом на сегмент $[-2,0]$ (геометрично для цього потрібно центрально симетрично відобразити графік функції $f(x)$ відносно початку координат O), а потім поширимо її

періодичним

способом з періодом $T = 4$ на всю числову пряму.



Знайдемо коефіцієнти Фур'є:

$$l = 2,$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{2}{2}\int_0^2 (4+2x)\sin\frac{\pi nx}{2}dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = 4+2x & du = 2dx \\ dv = \sin\frac{\pi nx}{2}dx & v = -\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2} \end{matrix} \right| = (4+2x)\cdot\left(-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\right)\Bigg|_0^2 -$$

$$-\int_0^2\left(-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\right)\cdot 2dx = 8\cdot\left(-\frac{2}{\pi n}\cos\pi n\right) - 4\cdot\left(-\frac{2}{\pi n}\cos 0\right) +$$

$$+\frac{4}{\pi n}\int_0^2 \cos\frac{\pi nx}{2}dx = -\frac{16}{\pi n}\cdot(-1)^n + \frac{8}{\pi n}\cdot 1 + \frac{4}{\pi n}\cdot\frac{2}{\pi n}\sin\left.\frac{\pi nx}{2}\right|_0^2 =$$

$$= -\frac{16(-1)^n}{\pi n} + \frac{8}{\pi n} + \frac{8}{\pi^2 n^2}\left(\sin \pi n - \sin 0\right) =$$

$$= \frac{16(-1)^{n+1}}{\pi n} + \frac{8}{\pi n} + \frac{8}{\pi^2 n^2}\cdot 0 = \frac{16(-1)^{n+1}}{\pi n} + \frac{8}{\pi n} = \frac{8}{\pi n}(2(-1)^{n+1}+1).$$

Отже, розвинення заданої функції в ряд Фур’є за синусами має вигляд:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi n}(2(-1)^{n+1}+1)\sin\frac{\pi nx}{2}.$$

2) Продовжимо функцію парним способом на сегмент $[-2{,}0]$ (геометрично для цього потрібно симетрично відобразити графік функції $f(x)$ відносно осі Oy), а потім поширимо її періодичним способом з періодом $T=4$ на всю числову пряму.

Знайдемо коефіцієнти Фур’є:

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx = \frac{2}{2}\int_0^2 (4+2x)dx = 4\cdot\int_0^2 dx + 2\cdot\int_0^2 xdx =$$

$$= 4\cdot x\Big|_0^2 + 2\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = 8-0+4-0 = 12,$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{2}{2}\int_0^2 (4+2x)\cos\frac{\pi nx}{2}dx =$$

$$=\left|\begin{array}{ll} u=4+2x & du=2dx \\ dv=\cos\dfrac{\pi nx}{2}dx & v=\dfrac{2}{\pi n}\sin\dfrac{\pi nx}{2} \end{array}\right| = (4+2x)\cdot\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\Bigg|_0^2 -$$

$$-\int_0^2\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{2}\cdot 2dx = 8\cdot\frac{2}{\pi n}\sin\pi n - 4\cdot\frac{2}{\pi n}\sin 0 - \frac{4}{\pi n}\cdot\int_0^2\sin\frac{\pi nx}{2}dx =$$

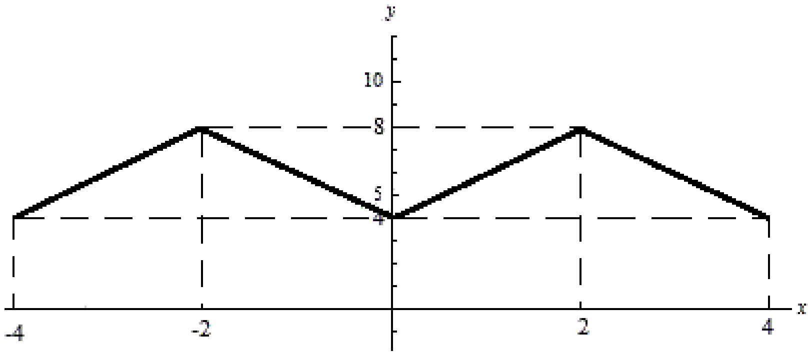
$$= 0 - \frac{4}{\pi n}\cdot\left(-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{8}{\pi^2 n^2}\cdot\left(\cos\pi n - \cos 0\right) =$$

$$= \frac{8}{\pi^2 n^2}\cdot((-1)^n - 1) = \frac{8((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2}.$$

Отже, розвинення заданої функції в ряд Фур’є за косинусами має вигляд:

$$f(x) = 6 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi nx}{2}.$$

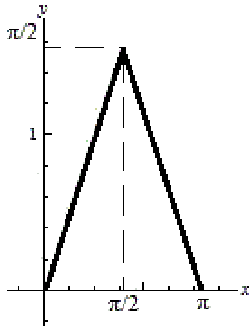
Графік періодичного продовження має вигляд:



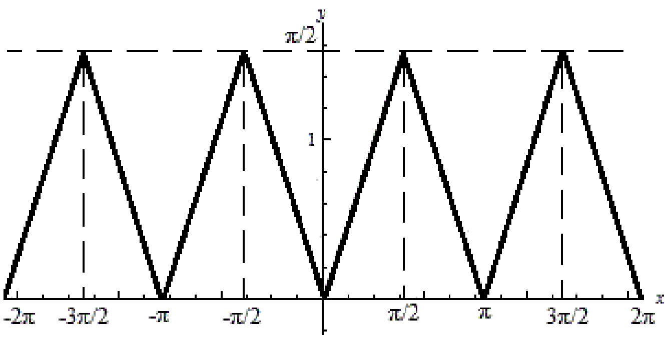
ПРИКЛАД 46. Розкласти в ряд Фур'є за косинусами (парне продовження) функцію

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<\dfrac{\pi}{2};\\ \pi-x, & \dfrac{\pi}{2}\le x\le \pi. \end{cases}$$

Розв'язання. Графік заданої функції має вигляд:



Продовжимо функцію парним способом на сегмент $[-\pi,0]$ (геометрично для цього потрібно симетрично відобразити графік функції $f(x)$ відносно осі Oy), а потім поширимо її періодичним способом з періодом $T=2\pi$ на всю числову пряму.



Знайдемо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)dx\right) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+\frac{2}{\pi}\cdot\left(\pi x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + \pi^2 - \frac{\pi^2}{2} - \left(\frac{\pi^2}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{8} + \pi^2 - \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{8}\right) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\pi^2}{8} = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\cos nx dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos nx dx + \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos nx dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cos nx dx\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos nx dx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix} =$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(x\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{n}\sin nx\,dx+\pi\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)-$$

$$-\frac{2}{\pi}\left(x\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{n}\sin nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2}-0-\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin nx\,dx+\frac{\pi}{n}\left(\sin\pi n-\sin\frac{\pi n}{2}\right)\right)-$$

$$-\frac{2}{\pi}\left(\pi\cdot\frac{1}{n}\sin\pi n-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2}-\frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2n}\sin\frac{\pi n}{2}-\frac{1}{n}\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{n}\left(0-\sin\frac{\pi n}{2}\right)\right)-$$

$$-\frac{2}{\pi}\left(0-\frac{\pi}{2n}\sin\frac{\pi n}{2}-\frac{1}{n}\cdot\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2n}\sin\frac{\pi n}{2}+\frac{1}{n^2}\cdot\left(\cos\frac{\pi n}{2}-\cos 0\right)-\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi n}{2}\right)-$$

$$-\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2n}\sin\frac{\pi n}{2}+\frac{1}{n^2}\cdot\left(\cos\pi n-\cos\frac{\pi n}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2n}\sin\frac{\pi n}{2}+\frac{1}{n^2}\cdot\left(\cos\frac{\pi n}{2}-1\right)\right)-$$

$$-\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2n}\sin\frac{\pi n}{2}+\frac{1}{n^2}\cdot\left((-1)^n-\cos\frac{\pi n}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\cdot\left(\cos\frac{\pi n}{2}-1-(-1)^n+\cos\frac{\pi n}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}\left(2\cos\frac{\pi n}{2}-1-(-1)^n\right).$$

Використаємо $\cos\frac{\pi n}{2}=\begin{cases}(-1)^k, & n=2k;\\ 0, & n=2k+1,\end{cases}\quad k=1,2,\ldots.$

Тоді

$$a_{2k}=\frac{2}{\pi(2k)^2}\left(2\cos\frac{\pi\cdot 2k}{2}-1-(-1)^{2k}\right)=\frac{2}{4\pi k^2}\left(2\cos\pi k-2\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi k^2}\cdot 2\left(\cos\pi k-1\right)=\frac{1}{\pi k^2}\left(\left((-1)^k-1\right)\right)=\frac{(-1)^k-1}{\pi k^2},$$

$$a_{2k+1}=\frac{2}{\pi(2k+1)^2}\left(2\cos\frac{\pi\cdot(2k+1)}{2}-1-(-1)^{2k+1}\right)=$$

$$= \frac{2}{\pi(2k+1)^2}\left(2\cos\frac{2\pi k+\pi}{2} - 1 - (-1)^{2k}\cdot(-1)\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi(2k+1)^2}\left(2\cos\left(\pi k+\frac{\pi}{2}\right) - 1 + 1\right) = \frac{2}{\pi(2k+1)^2}\cdot 2\sin\pi k = 0$$

,

$$\begin{cases} a_{2k} = \dfrac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}; \\ a_{2k+1} = 0. \end{cases}$$

Таким чином, розвинення заданої функції в ряд Фур'є за косинусами має вигляд:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}\cos 2kx.$$

3.4 Комплексна форма ряду Фур'є

Словесне формулювання	Аналітичний запис, графічне зображення
Ряд Фур'є в *комплексній формі*	$f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{\pi n x}{l}i}$, де $c_n = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)e^{-\frac{\pi n x}{l}i}dx$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Зауваження 34. Комплексна форма ряду Фур'є має більш простий вигляд. До того ж, у деяких випадках її застосування полегшує обчислення. При необхідності можна від комплексної форми перейти до дійсного вигляду, використовуючи співвідношення

$$a_0 = 2c_0,\ a_n = c_n + c_{-n},\ b_n = i(c_n - c_{-n}),$$

що дають дійсні значення, оскільки c_0 – дійсне число (середнє значення функції за період), а коефіцієнти c_{-n} і c_n – комплексно спряжені. Від дійсного вигляду до комплексної форми можна перейти за допомогою наступних спів відношень:

$$c_0 = \frac{a_0}{2},\ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2},\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

ПРИКЛАД 47. Розвинути в ряд Фур'є в комплексній формі функцію

$$f(x) = \begin{cases} e^x, -\pi \le x < 0; \\ 2e^{-x}, 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо комплексні коефіцієнти Фур'є:

$$l = \pi,$$

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-\frac{\pi n x}{l} i} dx = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} e^x e^{-\frac{\pi n x}{\pi} i} dx + \int_{0}^{\pi} 2e^{-x} e^{-\frac{\pi n x}{\pi} i} dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} e^{x(1-ni)} dx + 2\int_{0}^{\pi} e^{-x(1+ni)} dx\right) =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1-ni}e^{x(1-ni)}\Big|_{-\pi}^{0}+2\cdot\frac{1}{-(1+ni)}e^{-x(1+ni)}\Big|_{0}^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1-ni}\left(e^{0}-e^{-\pi(1-ni)}\right)-\frac{2}{1+ni}\left(e^{-\pi(1+ni)}-e^{0}\right)\right)=$$

$$=\frac{1-e^{-\pi(1-ni)}}{2\pi(1-ni)}-\frac{2\left(e^{-\pi(1+ni)}-1\right)}{2\pi(1+ni)}=$$

$$=\left|\begin{matrix}e^{\pi ni}=(-1)^{n}\\ e^{-\pi ni}=(-1)^{n}\end{matrix}\right|=\frac{\left(1-e^{-\pi}\cdot e^{\pi ni}\right)(1+ni)-2\left(e^{-\pi}\cdot e^{-\pi ni}-1\right)(1-ni)}{2\pi(1-ni)(1+ni)}=$$

$$=\frac{\left(1-e^{-\pi}\cdot(-1)^{n}\right)(1+ni)-2\left(e^{-\pi}\cdot(-1)^{n}-1\right)(1-ni)}{2\pi(1-ni+ni-n^{2}i^{2})}=$$

$$=\frac{3-3e^{-\pi}(-1)^{n}-ni+e^{-\pi}(-1)^{n}ni}{2\pi(1+n^{2})}=$$

$$=\frac{3\left(1-e^{-\pi}(-1)^{n}\right)}{2\pi(1+n^{2})}+\frac{n\left(e^{-\pi}(-1)^{n}-1\right)}{2\pi(1+n^{2})}i\,.$$

Таким чином, комплексний ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{3\left(1-e^{-\pi}(-1)^{n}\right)}{1+n^{2}}+\frac{n\left(e^{-\pi}(-1)^{n}-1\right)}{1+n^{2}}i\right)e^{nxi}\,.$$

ПРИКЛАД 48. Розвинути в ряд Фур'є в комплексній формі функцію $f(x) = x^2$, задану на інтервалі $[-1,1]$.

Розв'язання. Знайдемо комплексні коефіцієнти Фур'є:

$$l = 1,$$

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-\frac{\pi nx}{l}i}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 e^{-\pi nxi}dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = e^{-\pi nxi}dx & v = -\dfrac{1}{\pi ni}e^{-\pi nxi} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot \left(-\frac{1}{\pi ni}e^{-\pi nxi} \right)\Bigg|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\left(-\frac{1}{\pi ni}e^{-\pi nxi} \right)\cdot 2xdx \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\pi ni}e^{-\pi ni} + \frac{1}{\pi ni}e^{\pi ni} + \frac{2}{\pi ni}\cdot\int_{-1}^{1} xe^{-\pi nxi}dx \right) = \begin{vmatrix} e^{\pi ni} = (-1)^n \\ e^{-\pi ni} = (-1)^n \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\pi ni}(-1)^n + \frac{1}{\pi ni}(-1)^n + \frac{2}{\pi ni}\cdot\int_{-1}^{1} xe^{-\pi nxi}dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi ni}\cdot\int_{-1}^{1} xe^{-\pi nxi}dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-\pi nxi}dx & v = -\dfrac{1}{\pi ni}e^{-\pi nxi} \end{vmatrix} =$$

$$=\frac{1}{\pi ni}\cdot\left(x\cdot\left(-\frac{1}{\pi ni}e^{-\pi nxi}\right)\Bigg|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\left(-\frac{1}{\pi ni}e^{-\pi nxi}\right)dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi ni}\cdot\left(-\frac{1}{\pi ni}e^{-\pi ni}-\frac{1}{\pi ni}e^{\pi ni}+\frac{1}{\pi ni}\cdot\int_{-1}^{1}e^{-\pi nxi}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi ni}\cdot\left(-\frac{1}{\pi ni}(-1)^n-\frac{1}{\pi ni}(-1)^n+\frac{1}{\pi ni}\cdot\left(-\frac{1}{\pi ni}e^{-\pi nxi}\right)\Bigg|_{-1}^{1}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi ni}\cdot\left(-\frac{2}{\pi ni}(-1)^n-\frac{1}{\pi^2n^2i^2}\cdot\left(e^{-\pi ni}-e^{\pi ni}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi ni}\cdot\left(-\frac{2}{\pi ni}(-1)^n-\frac{1}{\pi^2n^2\cdot(-1)}\cdot\left((-1)^n-(-1)^n\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi ni}\cdot\left(-\frac{2}{\pi ni}(-1)^n-\frac{1}{\pi^2n^2\cdot(-1)}\cdot 0\right)=\frac{1}{\pi ni}\cdot\left(-\frac{2}{\pi ni}(-1)^n\right)=$$

$$=-\frac{2}{\pi^2n^2i^2}(-1)^n=-\frac{2}{\pi^2n^2\cdot(-1)}(-1)^n=\frac{2(-1)^n}{\pi^2n^2},\ n\neq 0,$$

$$c_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{1^3}{6}-\frac{(-1)^3}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Таким чином, комплексний ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x)=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^{-n}}{\pi^2(-n)^2}e^{-\pi nxi}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2(-1)^n}{\pi^2n^2}e^{\pi nxi}=$$

$$= \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2(-1)^{-n}}{\pi^2 (-n)^2} e^{-\pi nxi} + \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2} e^{\pi nxi} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi^2 n^2} \left(e^{-\pi nxi} + e^{\pi nxi} \right) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot \frac{e^{-\pi nxi} + e^{\pi nxi}}{2} =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot \frac{e^{-\pi nxi} + e^{\pi nxi}}{2} = \left| \frac{e^{-\pi nxi} + e^{\pi nxi}}{2} = \cos \pi nx \right| =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \pi nx .$$

СПИСОК ДЖЕРЕЛ

1. Бугрим О.В. Числові та степеневі ряди. Приклади їх застосування: навч. посіб. для студ. напряму підгот. 6.050301 Гірництво / О. В. Бугрим, Л. Й. Бойко ; М-во освіти і науки України; Нац. гірн. ун-т. – Дніпропетровськ : НГУ, 2014. – 82 с

2. Высшая математика для экономистов : учебник для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман ; Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : ЮНИТИ, 2001. – 471 с.

3. Высшая математика. Решение задач и варианты типовых расчетов. Часть II : учеб. пособ. / Под ред. Л. В. Курпа. – Харків : ХДПУ, 1999. – 280 с.

4. Гуран І. Математика для економістів : Підручник / І. Гуран, О. Гутік. – Львів, 2006. – 382 с.

5. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : в четырех частях / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Наука, 1986. – Ч. 1. – 303 с., Ч. 2 – 415 с.

6. Збірних тестових завдань з вищої математики. Частина 3. Функціональні ряди / А. І. Колосов, А. В. Якунін, Ю. В. Ситникова. – Харків : ХНАМГ, 2007. – 127 с.

7. Колосов А. І. Вища математика для економістів : у 2-х модулях : конспект лекцій для студентів 1 курсу денної форми навчання за напрямами підготовки 6.030504 – Економіка підприємства і 6.030509 – Облік і аудит [Електронний ресурс] / А. І. Колосов, А. В. Якунін, Ю. В. Ситникова. – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – Модуль 2. – 257 с. – Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/35973/.

8. Кузнецова Г. А. Навчальний довідник в схемах і таблицях для самостійного вивчення теми «Аналітична гео-метрія» з курсу вищої математики [Електронний ресурс] /

Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2013. – Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/34810.

9. Кузнецова Г. А. Основи математичного аналізу в схемах і таблицях. Частина 1 : навчальний довідник для самостійного вивчення курсу вищої математики [Електронний ресурс] / Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2014. – Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/39383.

10. Кузнецова Г. А. Основи математичного аналізу в схемах і таблицях. Частина 2 : навчальний довідник для самостійного вивчення курсу вищої математики [Електронний ресурс] / Г. А. Кузнецова, С. М. Ламтюгова, Ю. В. Ситникова – Харків : ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2015. – Режим доступу : http://eprints.kname.edu.ua/42486.

11. Lamtyugova S. M. Advanced mathematics. Module 3 : lecture notes for 2nd-year full-time and part-time students education level “bachelor” specialty 192 – Construction and civil engineering / S.M. Lamtyugova ; O. M. Beketov National University of Urban Economy in Kharkiv. − Kharkiv : O. M. Beketov NUUE, 2019. – 97 p.

АБЕТКОВИЙ ПОКАЖЧИК

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Метод невизначених коефіцієнтів

Цей метод вимагає запису шуканого рішення рівняння у вигляді степеневого ряду

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

невизначені коефіцієнти якого a_n $(n = 1,2,...)$ за допомогою підстановки шуканого рішення рівняння в диференціальне рівняння (з початкових умов визначаються коефіцієнти) й співставлення коефіцієнтів при однакових степенях біному $\left(x - x_0\right)$ з лівої та правої частини отриманого рівняння

ДОДАТОК Б

Метод послідовного диференціювання

Цей метод полягає в тому, що шукане рішення рівняння записується у вигляді ряду Тейлора

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

або ряд Маклорена

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n \ ,$$

коефіцієнти яких $y^{(n)}(x_0)$ або $y^{(n)}(0)$ знаходяться за початковими умовами з заданого рівняння за допомогою його послідовного диференціювання.

Довідкове видання

ЛАМТЮГОВА Світлана Миколаївна,
СИТНИКОВА Юлія Валеріівна,
КУЗНЕЦОВА Ганна Анатоліївна

РЯДИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ
У СХЕМАХ І ТАБЛИЦЯХ

Навчальний довідник
для самостійного вивчення курсу вищої математики
для студентів 1–2 курсів денної та заочної форм навчання

Відповідальний за випуск *А. В. Якунін*

За авторською редакцією

Комп’ютерне верстання *С. М. Ламтюгова*

План 2019, поз. 19Н

Підп. до друку 19.11.2019. Формат 60 × 84/16.
Друк на ризографі. Ум. друк. арк. 3,3
Тираж 50 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства імені О. М. Бекетова,
вул. Маршала Бажанова, 17, Харків, 61002.
Електронна адреса: rectorat@kname.edu.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
ДК № 5328 від 11.04.2017.